



Politechnika Śląska w Gliwicach
Wydział Elektryczny

„Badanie filtrów antyaliasingowych”

autor:
mgr inż. Łukasz Roj

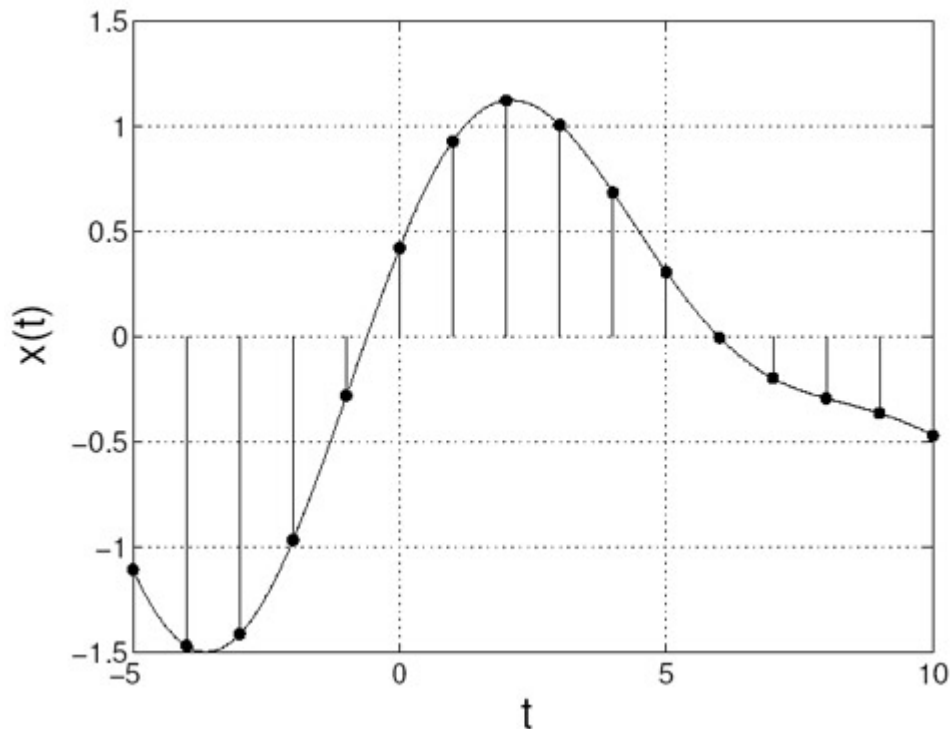
Wstęp teoretyczny

Próbkowanie sygnałów ciągłych

W wielu gałęziach współczesnej nauki wykorzystywane są sygnały cyfrowe. Można je spotkać m.in. w :

- ✓ Telekomunikacji i łączności
- ✓ Układach sterujących i przetwarzających dane
- ✓ W układach zabezpieczeń
- ✓ W układach audio-video
- ✓ Układach pomiarowych

Wszędzie tam są one reprezentantami analogowych, ciągłych sygnałów, jakie występują w fizycznym świecie. Dlatego prędzej lub później w torze działania układu następuje zamiana sygnałów cyfrowych na analogowe lub odwrotnie. Podstawą przemiany sygnału ciągłego na dyskretny, czyli nieciągły jest próbkowanie (z angielskiego *sampling*) oraz kwantyzacja, czyli przypisanie każdej próbce jej wartości z danego przedziału, np. logicznego 0 i 1. Zajmijmy się próbkowaniem. Polega ono na podzieleniu sygnału ciągłego na szereg próbek (*samples*). Ilustruje to rysunek pierwszy:



Rys.1 Przykład sygnału ciągłego spróbkowanego

Opisu matematycznego sygnału spróbkowanego możemy dokonać podstawiając:

$$t \rightarrow nT_p$$

gdzie :

T_p –okres próbkowania

$$f = \frac{1}{T_p} \text{ –częstotliwość próbkowania}$$

Zatem dla przykładowego przebiegu sinusoidalnego, jego spróbkowany odpowiednik opisany będzie wzorami:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$f[n] = A \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} n T_p + \varphi\right)$$

gdzie:

T_0 – okres odnoszący się do pulsacji przebiegu pierwotnego

n – numer poszczególnej próbki. UWAGA! N jest liczbą naturalną

T_p – okres próbkowania

Sygnał taki dla różnych częstotliwości sygnału pierwotnego oraz stałej częstotliwości próbkowania przedstawia rysunek drugi. Zauważmy że im większa dysproporcja pomiędzy częstotliwością przebiegu próbkowanego a częstotliwością próbkowania tym mniej sygnały te są do siebie zbliżone. Dzieje się tak ze względu na niedopróbkowanie (*under sampling*) sygnału czyli za małą liczbę próbek na okres sygnału próbkowanego. W skrajnym przypadku spróbkowane sygnały (a) i (d) są identyczne. Prowadzi to do wniosku, że częstotliwość próbkowania powinna być odpowiednio dobierana. Aby dobrać właściwą częstotliwość spełnione musi być twierdzenie Szanona-Kotielnikowa.

Twierdzenie Shannona-Kotielnikowa

Twierdzenie to dla przypadku próbkowania równomiernego można wyrazić w następujący sposób:

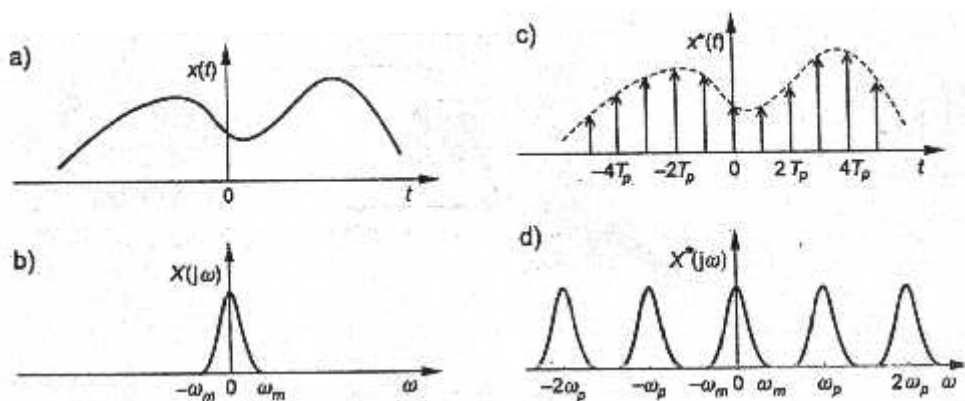
Jeżeli $f(t)$ jest sygnałem o ograniczonym widmie $F(j\omega)$:

$$F(j\omega) = \begin{cases} \neq 0 & \text{dla } |\omega| < \omega_m \\ = 0 & \text{dla } |\omega| \geq \omega_m \end{cases}$$

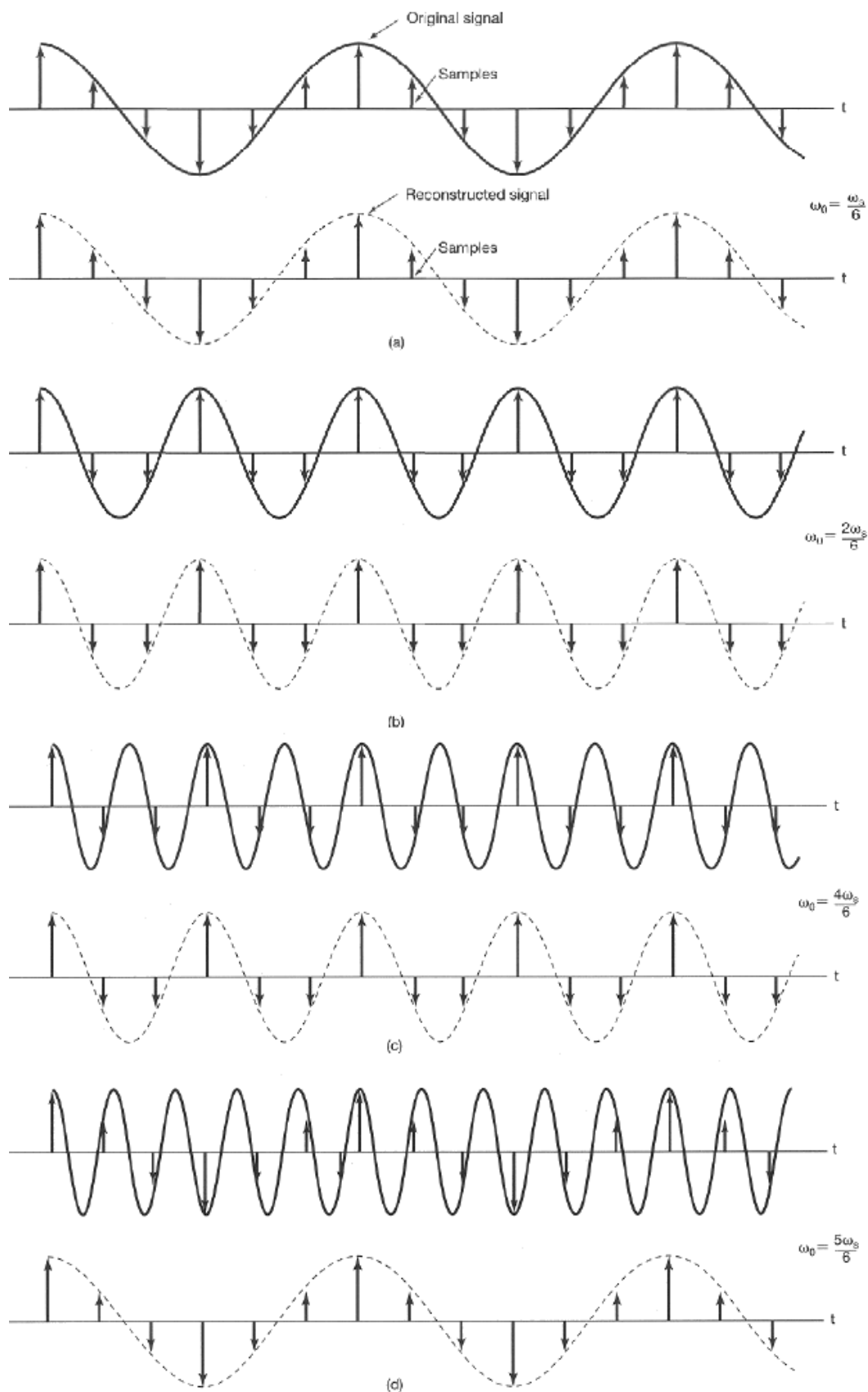
to sygnał ten można przedstawić z dowolną dokładnością za pomocą szeregu Shannona-Kotielnikowa. Próbki sygnału $f(t)$ muszą być równooddalone o stały przedział próbkowania T , taki że:

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$$

Czyli inaczej mówiąc aby sygnał ciągły można było odtworzyć na podstawie sygnału spróbkowanego z dowolnie dużą dokładnością wystarczy by częstotliwość próbkowania była większa lub równa podwojonej największej częstotliwości widma Fouriera sygnału próbkowanego. Wówczas przebieg spróbkowany oraz jego widmo będzie się przedstawiać następująco:



Rys.3 widmo sygnału spróbkowanego



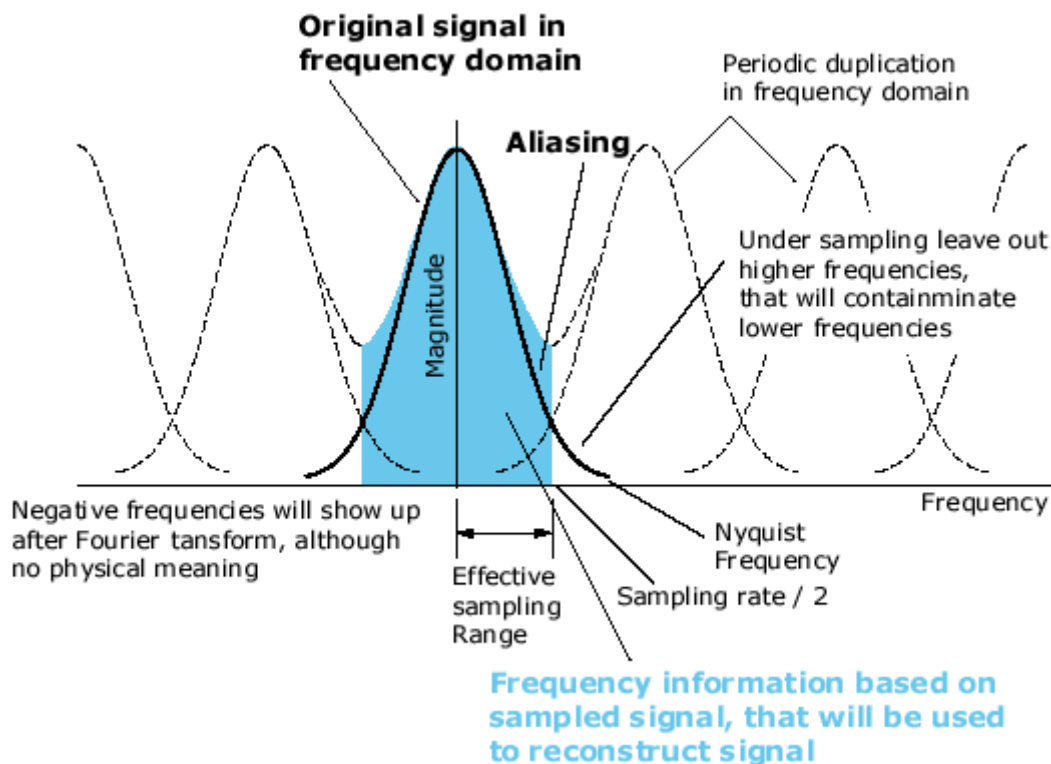
Rys.2 Próbkowanie sygnału sinusoidalnego

Widmo sygnału dyskretnego jest więc repliką widma sygnału ciągłego (pomnożonego przez współczynnik proporcjonalności) powtarzaną co pulsację próbkowania w całym zakresie pulsacji ($-\infty$ do ∞). Gdy nie bierzemy pod uwagę założeń twierdzenia o

próbkowaniu, można tu wyróżnić dwa jakościowe przypadki: jeden gdy widma nie zachodzą na siebie i drugi przeciwny, gdy na siebie nachodzą. Drugi przypadek nazywany jest **Aliasing'iem**. Powoduje on iż widmo sygnału ulega takiemu odkształceniu, że podczas odtwarzania nawet idealny filtr dolnoprzepustowy nie jest w stanie poprawnie odtworzyć widma sygnału informacyjnego. Mamy więc zniekształcenia w sygnale odtwarzanym (w jego postaci czasowej) często uniemożliwiające jakikolwiek użytek sygnału. Przyjrzyjmy się bliżej temu zjawisku i metodom walki z nim.

Aliasing

Aliasing stanowi zjawisko nakładania się widm sygnałów. Występuje ono bardzo często m.in. podczas przetwarzania sygnałów, ich modulacji (PAM, PWM, PPM, FM, PM), przetwarzaniu sygnałów analogowych na cyfrowe (próbkowaniu wspomnianym już poprzednio). Jak już wspomniano powoduje on zniekształcenia sygnału co pokażemy w dalszej części pracy.



Rys.3 Zjawisko aliasingu

Istnieją dwie metody walki z tym zjawiskiem:

- ✓ Dobieranie pulsacji próbkowania tak, aby spełnić warunek twierdzenia Shanona
- ✓ Wybrać mniejszą pulsację, ale ograniczyć widmo sygnału za pomocą odpowiednio zaprojektowanego filtra analogowego, który poprzedza układ próbkowania. W wyniku tego warunek Shannona jest już spełniony, bez zmiany pulsacji próbkowania.

Drugie rozwiązanie jest korzystniejsze, gdyż pozwala na wydłużenie czasu (zmniejszenie częstotliwości) w którym następuje próbkowanie, a tym samym pozwala na zastosowanie tańszych przetworników A/C, zostawiając przy tym więcej czasu na operacje na sygnale oraz eliminując wysokie częstotliwości, które stanowią szum i nie zawierają żadnych informacji.

W niniejszej pracy zaprezentujemy kilka rodzajów filtrów wykorzystanych jako antyaliasingowe. Będą to filtry analogowe projektowane za pomocą algorytmów :

- ✓ Filtry Butterwortha
- ✓ Filtry Czybyszewa

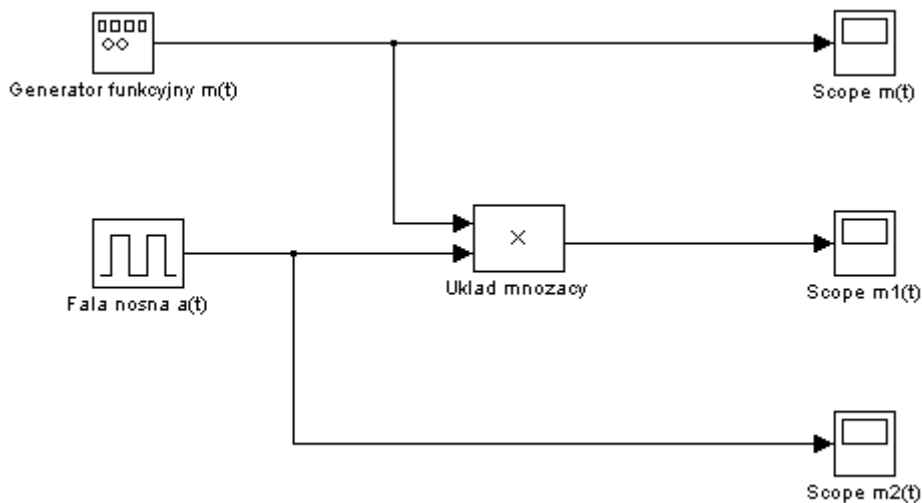
Podstawy opisu matematycznego niniejszych filtrów, jak również ich właściwości opisano podczas badań poszczególnych filtrów.

Badania

Wszystkie badanie przeprowadziliśmy w programie MatLab Simulink. Wykresy widma zostały wykreślone na podstawie skryptu napisanego w programie i ułatwiły pracę.

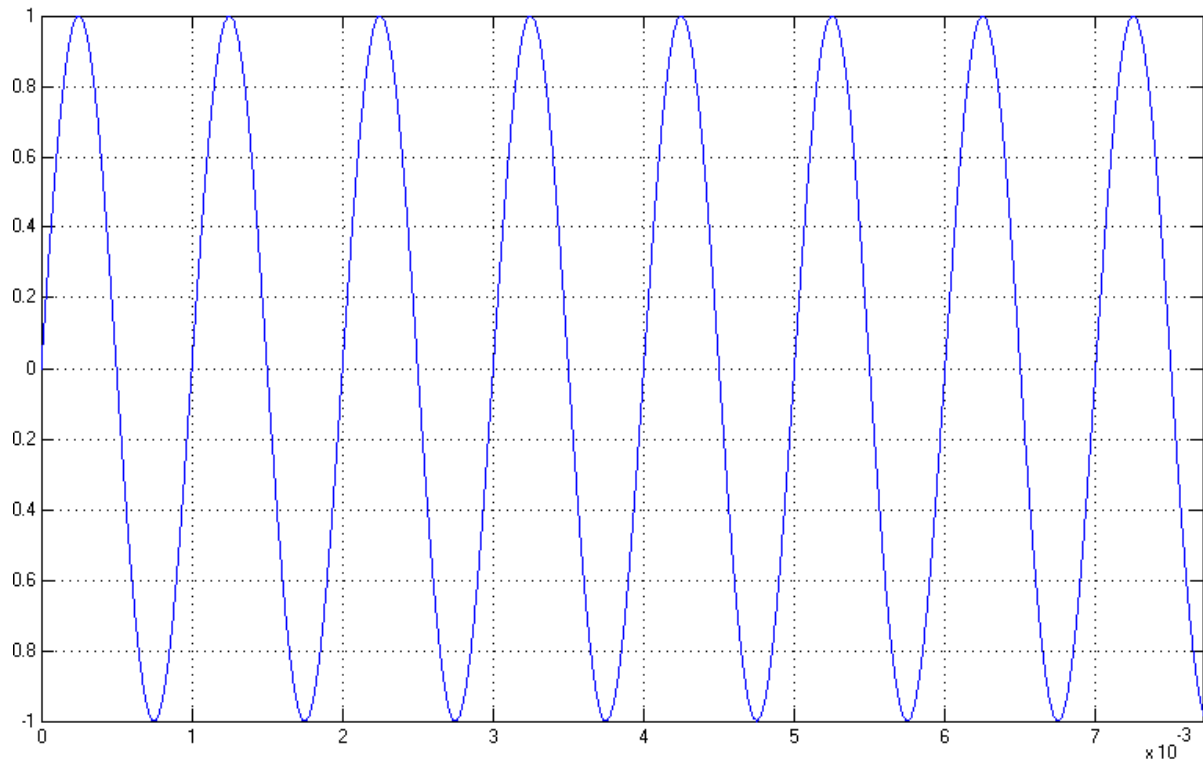
Próbkowanie i aliasing - czy to nie bajka?

Na początku udowodnimy twierdzenie Shanonna-Kotelnikowa o próbkowaniu. W tym celu zobaczymy jak wygląda przebieg czasowy, jego spróbkowana postać, widmo obu przebiegów oraz sygnał z błędnie dobranymi częstotliwościami próbkowania. Badanie przeprowadzimy w następującym układzie:



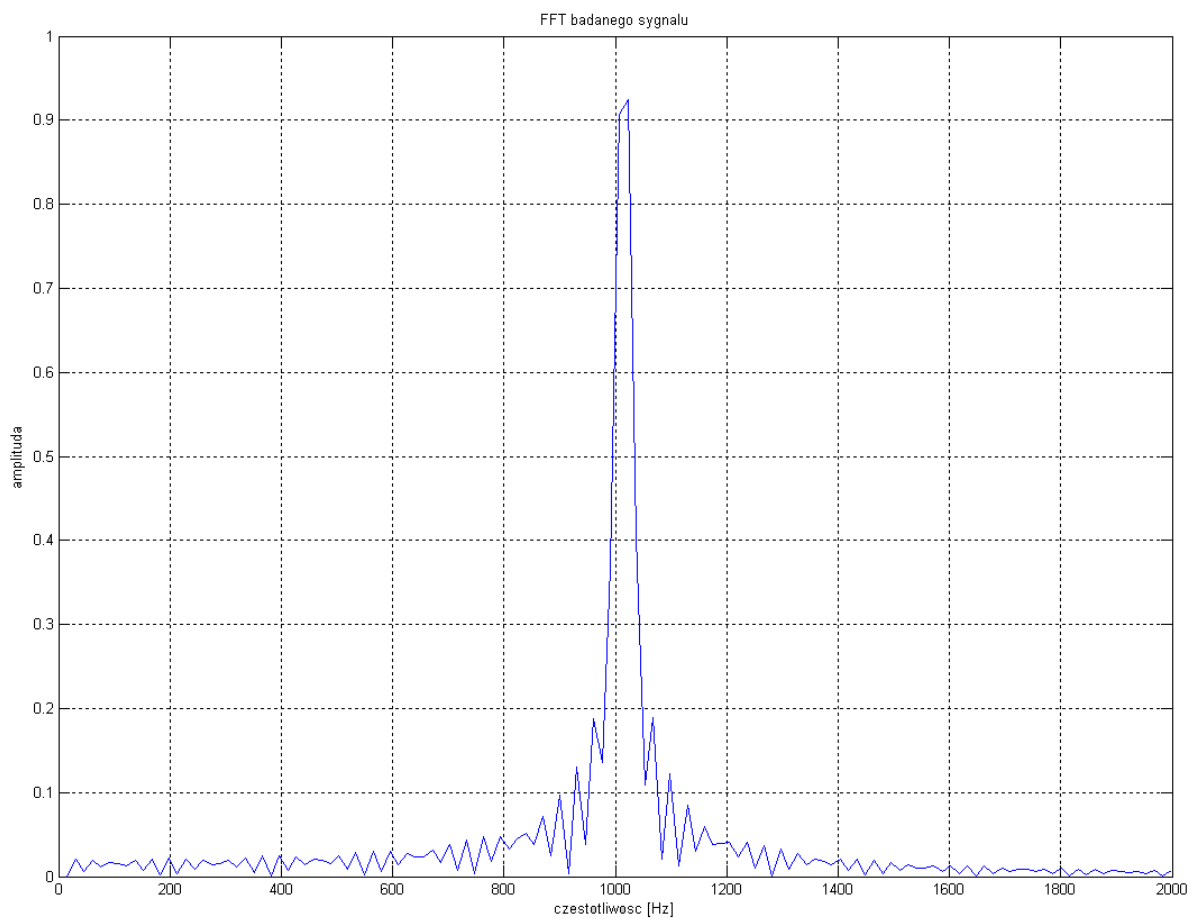
Rys.4 Model układu do demonstracji próbkowania w Matlab

Każda wartość sygnału pochodzącego z generatora jest wymnażana przez przebieg prostokątny o bardzo małym (rzędu 0.01%) wypełnieniu. Odpowiada to sytuacji idealnej, w praktyce nie realizowalnej. W praktycznych zastosowaniach dąży się do zwiększenia wypełnienia i optymalnie ustala się ono na 30-50%, wówczas przebieg zachowuje poprawny kształt, a amplituda powielonych w widmie sygnału spróbkowanego widm sygnału informacyjnego zostaje zmniejszona wraz z wzrostem częstotliwości. Jednocześnie fizyczne wykonanie układu staje się łatwiejsze, gdyż obsługuje on niższe częstotliwości. Sygnał informacyjny $m(t)$ ma postać:



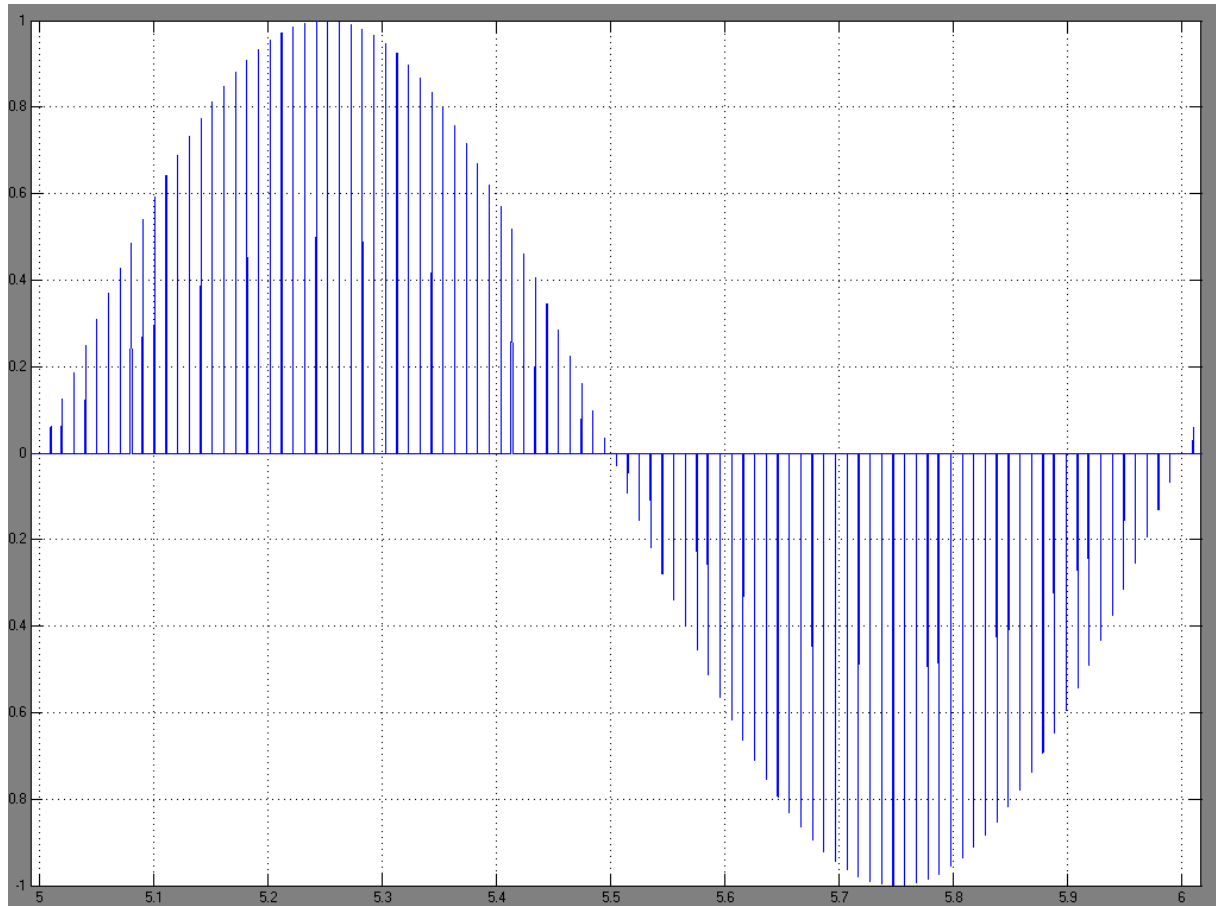
Rys.5 Przebieg sygnału badanego $m(t)$

Widmem tego sygnału jest pojedynczy, harmoniczny prążek o częstotliwości tego przebiegu:



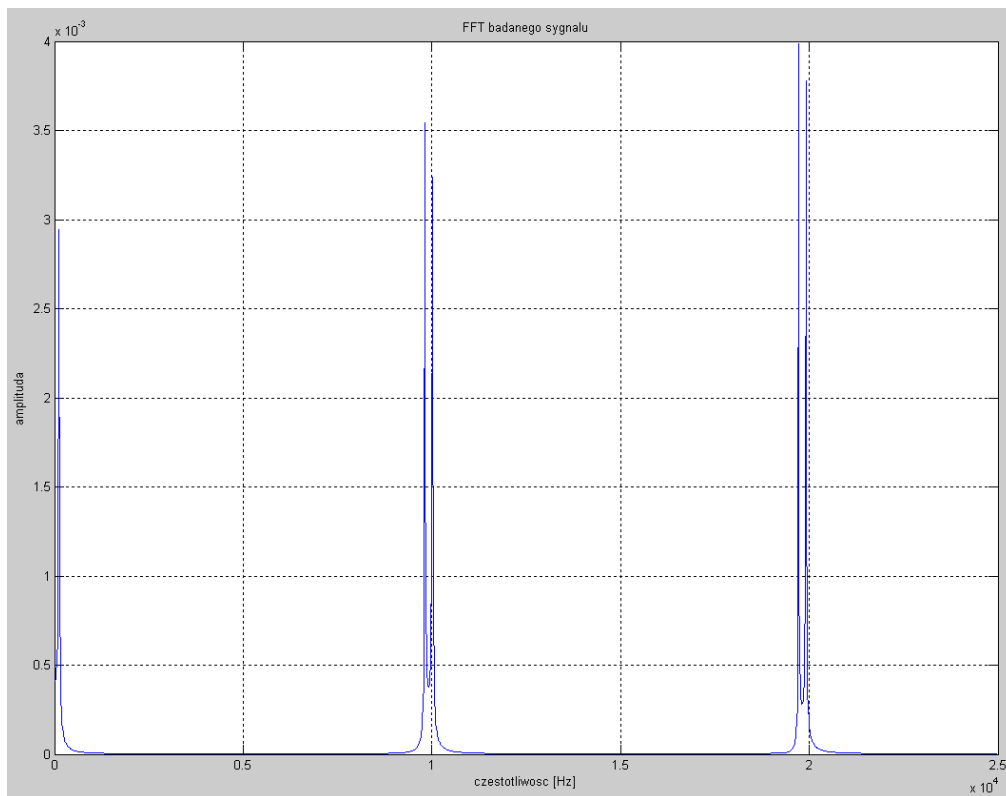
Rys.6 Widmo sinusa 1000 Hz przed próbkowaniem

Po spróbkowaniu sygnałem o wypełnieniu 1% oraz częstotliwości 10 krotnie wyższej niż częstotliwość sygnału informacyjnego otrzymaliśmy przebieg czasowy:



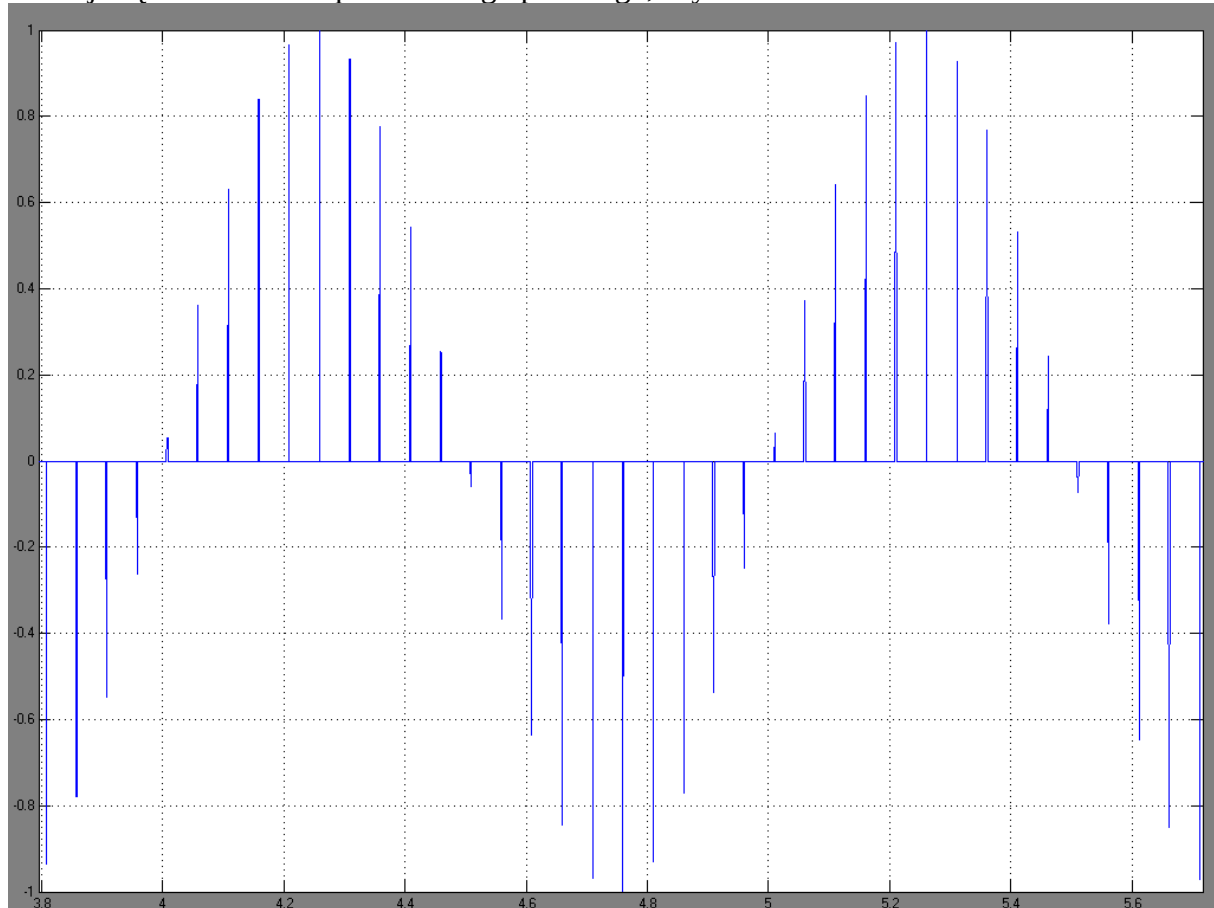
Rys.7 Spróbkowany sinus

Widmo tego sygnału stanowi rozstrzelone co 10kHz (częstotliwość próbkowania) widmo sygnału informacyjnego.



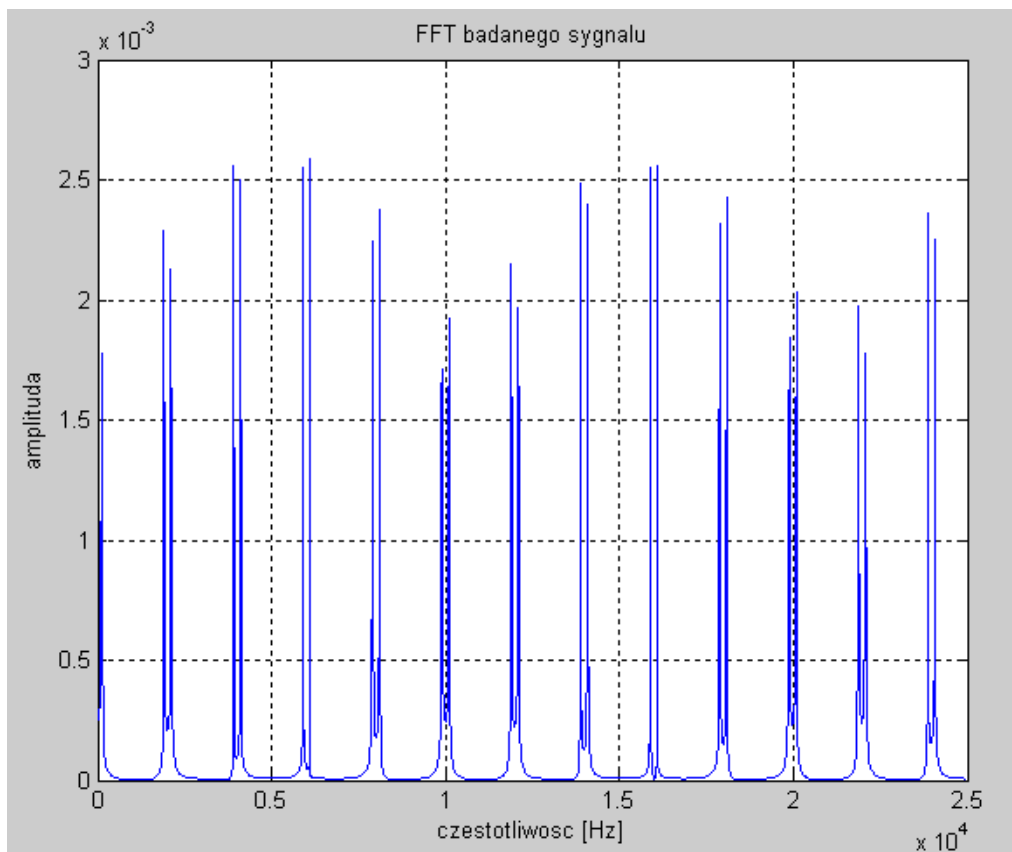
Rys.8 Widmo sygnału spróbkowanego

Zobaczmy co stanie się gdy sygnał będzie próbkowany przy częstotliwości próbkowania równej częstotliwości Niquista dla tego przebiegu, czyli 2000Hz:



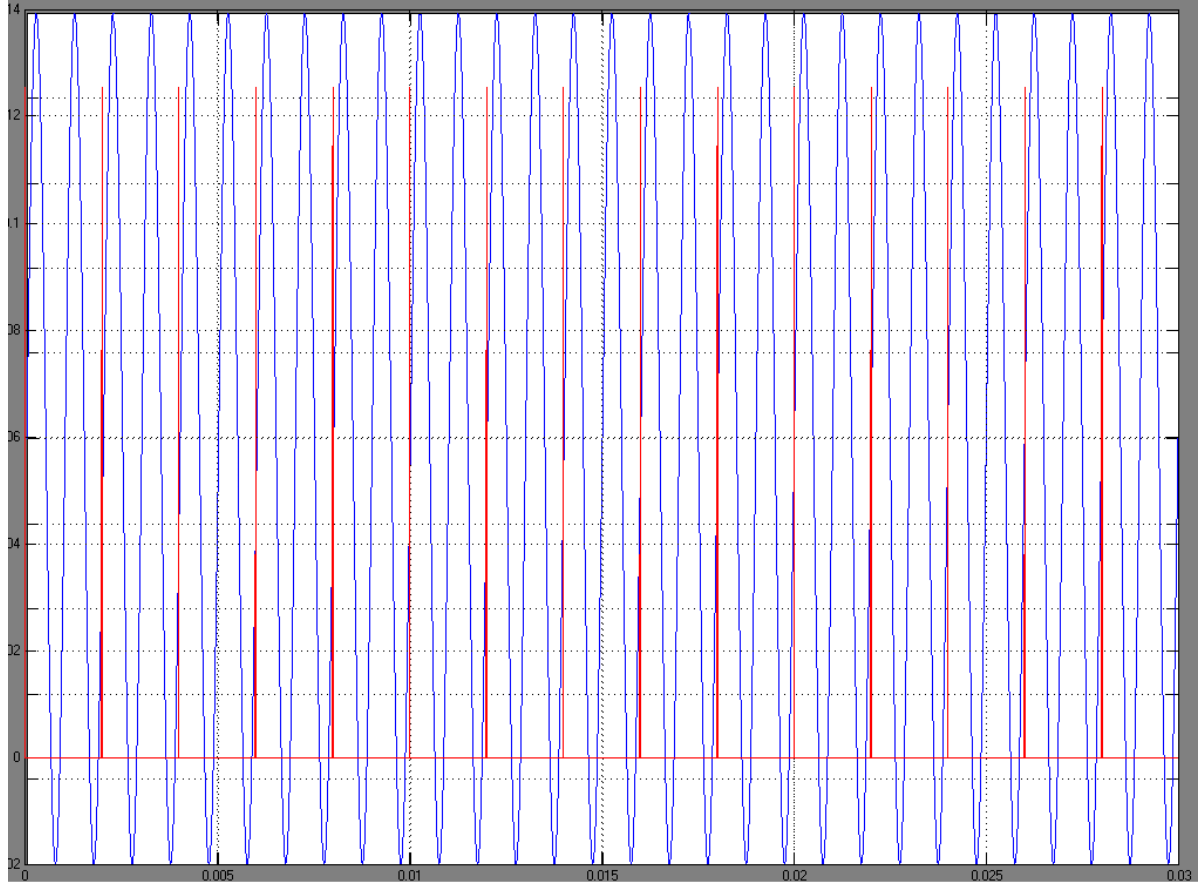
Rys.9 sygnał przy próbkowaniu z częstotliwością Niquista

Widmo tak spróbkowanego sygnału przyjmie postać:



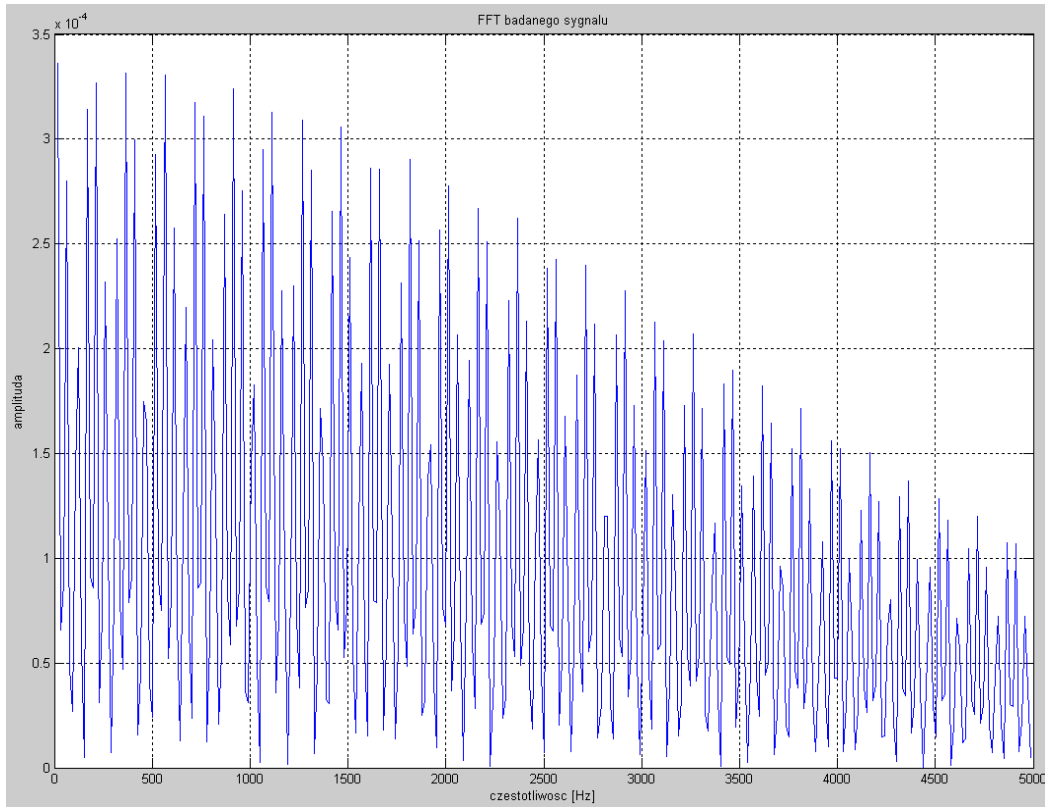
Rys.10 Widmo sygnału próbkowanego z częstotliwością Niquista

Widzimy zatem, że powielone widma sygnału informacyjnego prawie dotykają się, jednak nie następuje jeszcze przelewanie energii jednego z widm na drugie. Zupełnie inaczej ma się sprawa gdy warunki poprawnego próbkowania nie zostaną zachowane. Przedstawia to rysunek kolejny. Ustawmy częstotliwość próbkowania na 500Hz. Sygnał próbkowany przyjmie postać:



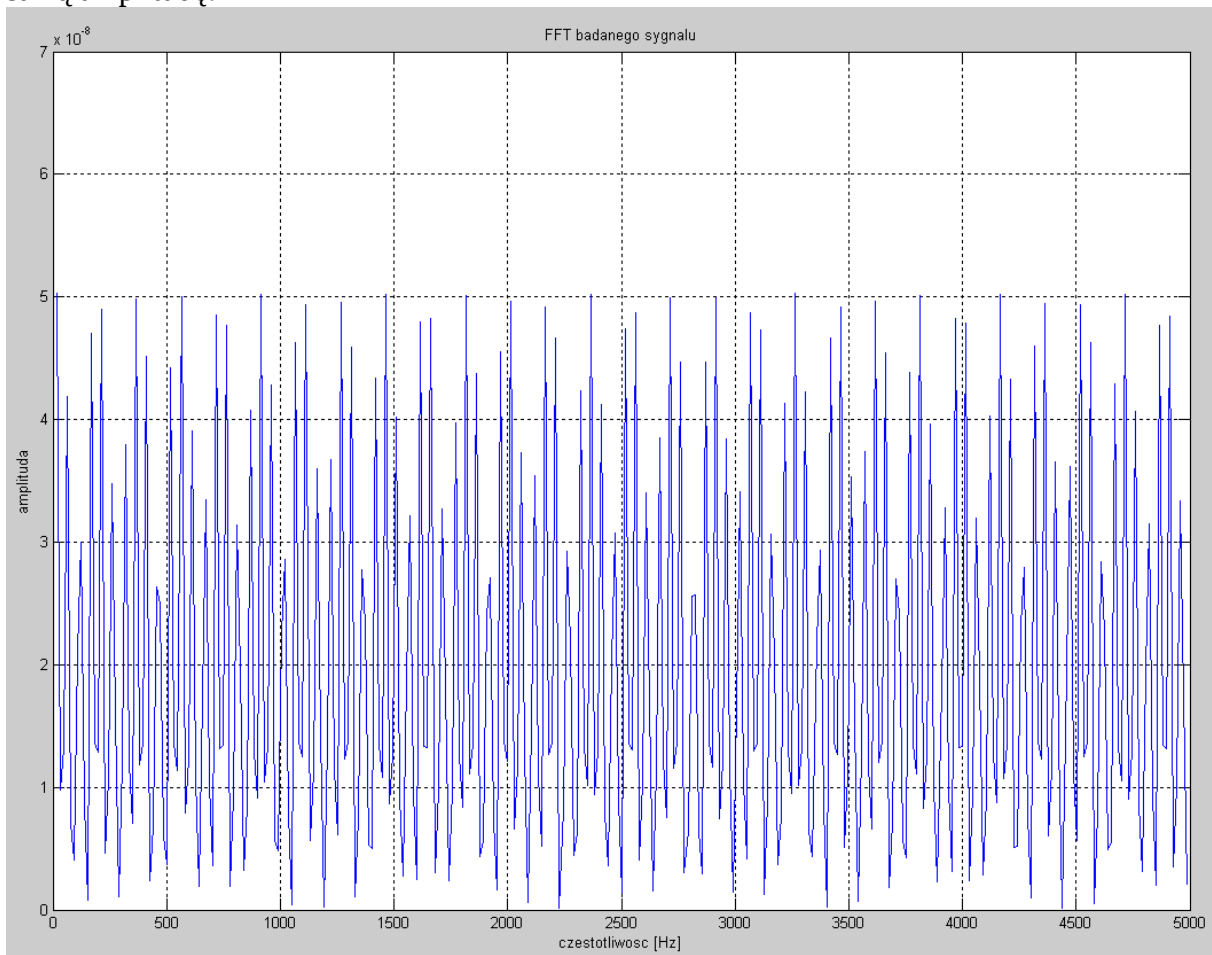
Rys.11 Błędne próbkowanie

Widzimy, że poszczególne próbki omijają przebieg sinusoidalny, a więc sygnał na wyjściu nie stanowi w żadnej mierze kopii dyskretnej sygnału oryginalnego. Również w widmie widzimy bardzo wyraźnie efekt aliasingu:

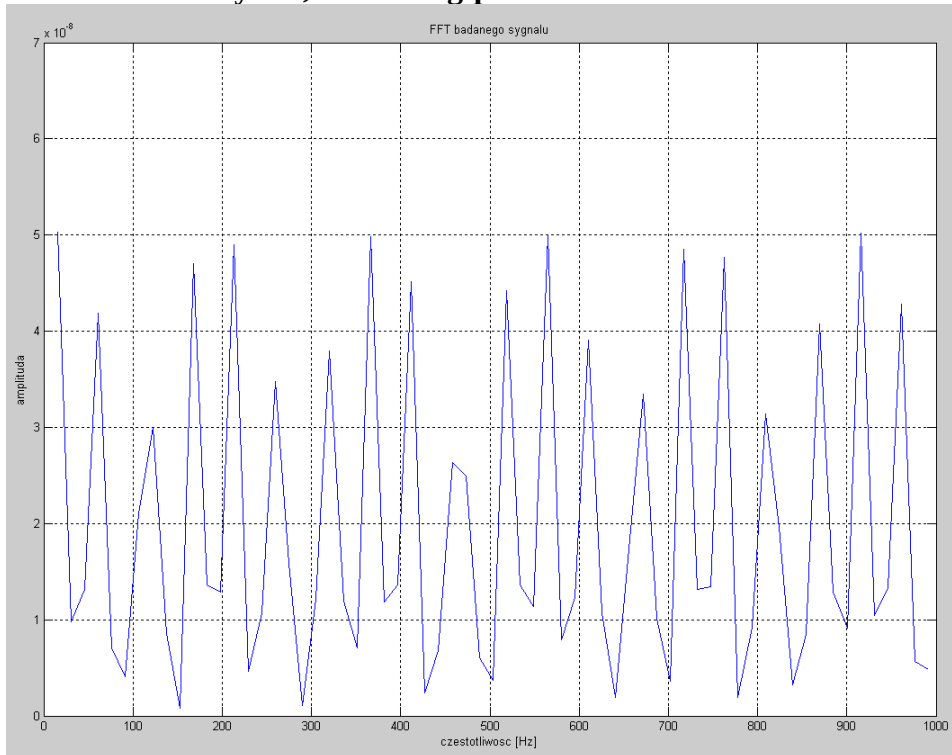


Rys.12 Zjawisko aliasingu

Przyjrzyjmy się bliżej temu zjawisku dokonując większej ilości pomiarów. W przypadku idealnego próbkowania (czyli z jak najmniejszym wypełnieniem impulsu na generatorze) poszczególne widma przenikają się wzajemnie i niezależnie od częstotliwości posiadają tę samą amplitudę:



Rys.13,14 Aliasing-próbkowanie idealne



Jak widzimy widmo jest tak mocno zatarte, że nie możemy nawet odróżnić poszczególnych widm informacji – stanowi jeden szum. Sygnał nie jest jak już wspomniano w żadnej mierze kopią sygnału informacyjnego i nie ma z nim nic wspólnego. Wyraźnie potwierdziły się założenia dotyczące próbkowania wysnute przez Shannona.

Filtry antyaliasingowe – własności

FILTR BUTTERWORTHA

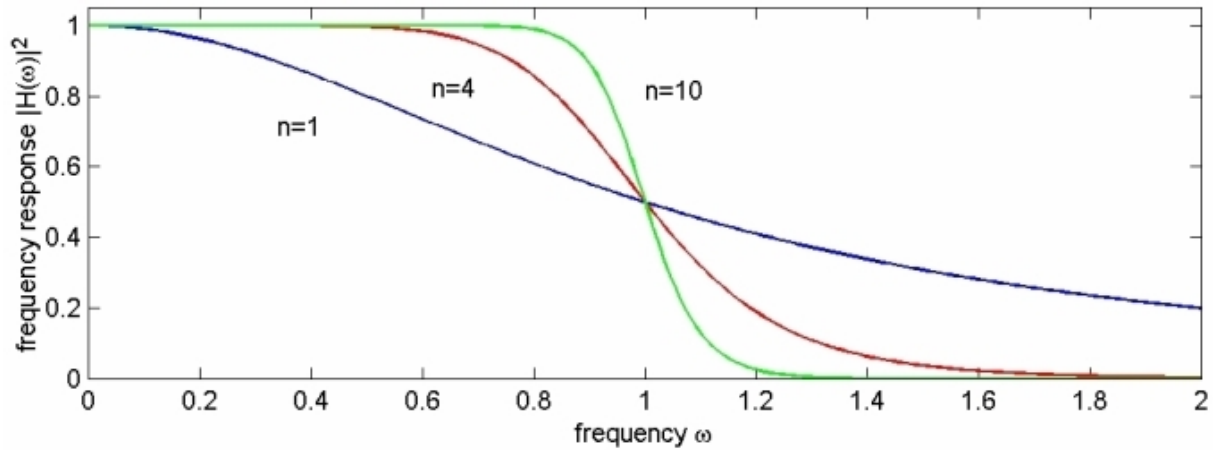
Kwadrat charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtru Butterwortha dany jest wzorem:

$$H^2(\omega) = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}$$

Parametr N oznacza rząd filtru. Pulsacja ω_0 to 3dB pulsacja graniczna. Dla tej właśnie pulsacji moduł charakterystyki amplitudowej filtru, który nazywany jest jego wzmocnieniem, maleje o 3dB w stosunku do wzmocnienia dla składowej stałej sygnału.

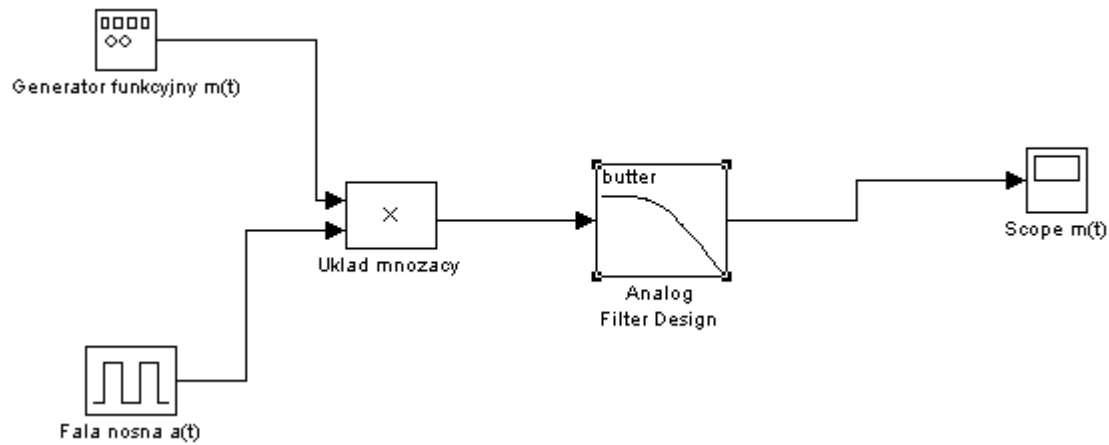
Jedną z podstawowych cech filtru Butterwortha jest zależność mówiąca że wraz ze wzrostem rzędu filtru jego charakterystyka amplitudowa coraz bardziej zbliża się do charakterystyki filtru idealnego. Przedstawia to na wykresie zależności kwadratu charakterystyki

amplitudowej dla filtrów rzędu $N=1,4,10$ w stosunku do pulsacji ω .



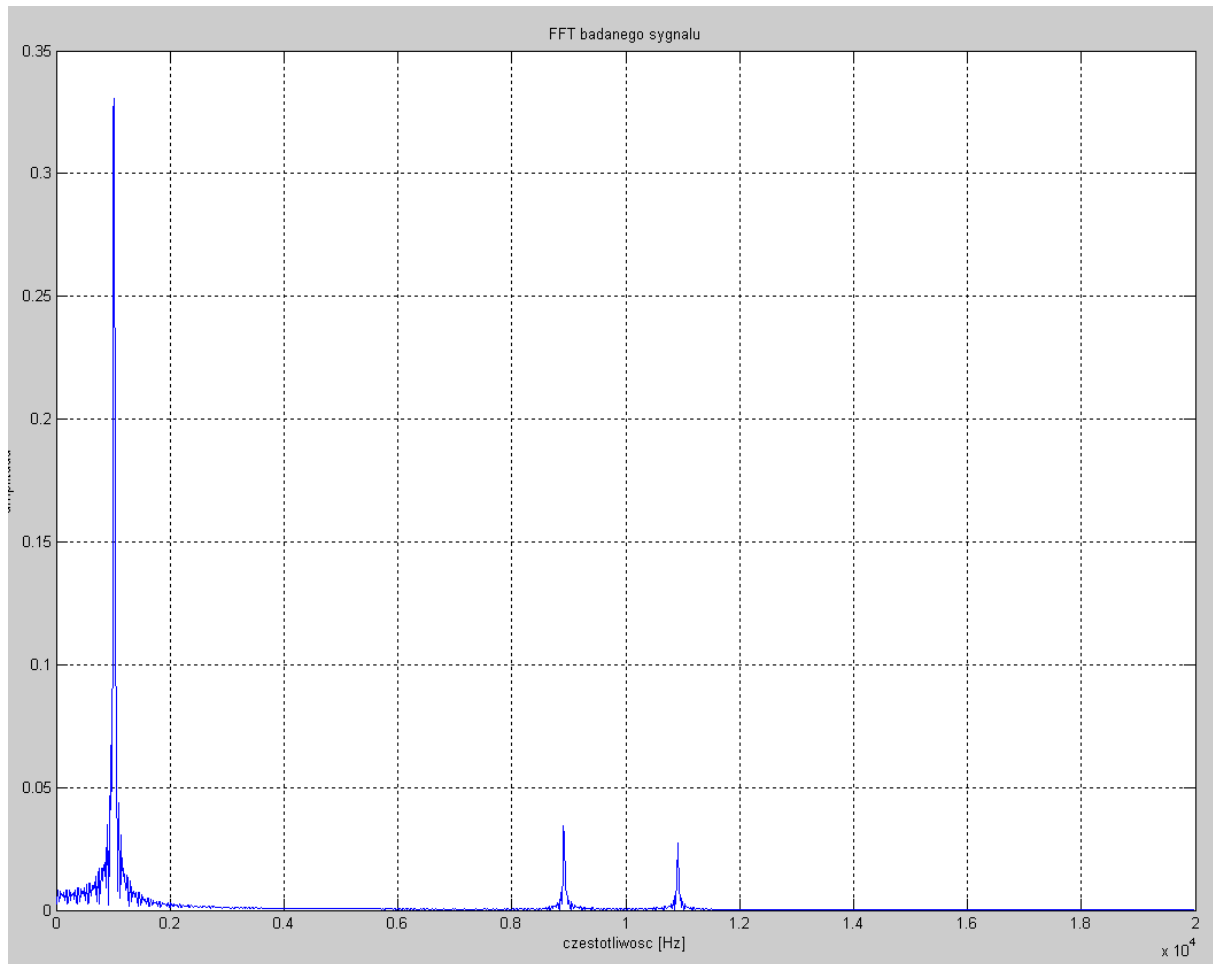
Rys. 15 Kwadrat charakterystyki amplitudowej filtrów Butterwortha rzędu 1,4 i 10.

Oznacza to, że im wyższy rząd mamy filtru, tym szybsze powinno być tłumienie wokół częstotliwości granicznej. Sformułowanie „szybsze” oznacza tu, że układ nie przepuszcza czyli silnie tłumi już bardzo niewiele wyższe od granicznej częstotliwości. Sprawdźmy tę cechę na widmie sygnałów. Skorzystamy z układu:



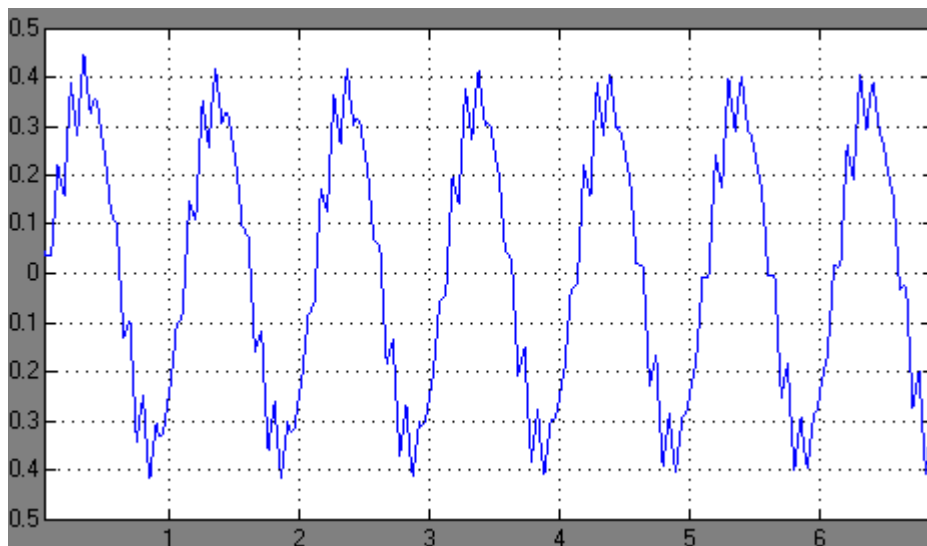
Rys.16 Model do badania własności filtru Butterwortha

Na początku rząd filtru wynosi $N=1$. Częstotliwość graniczną filtru ustawiliśmy na 1000Hz. Widmo sygnału po przejściu przez filtr wygląda następująco:



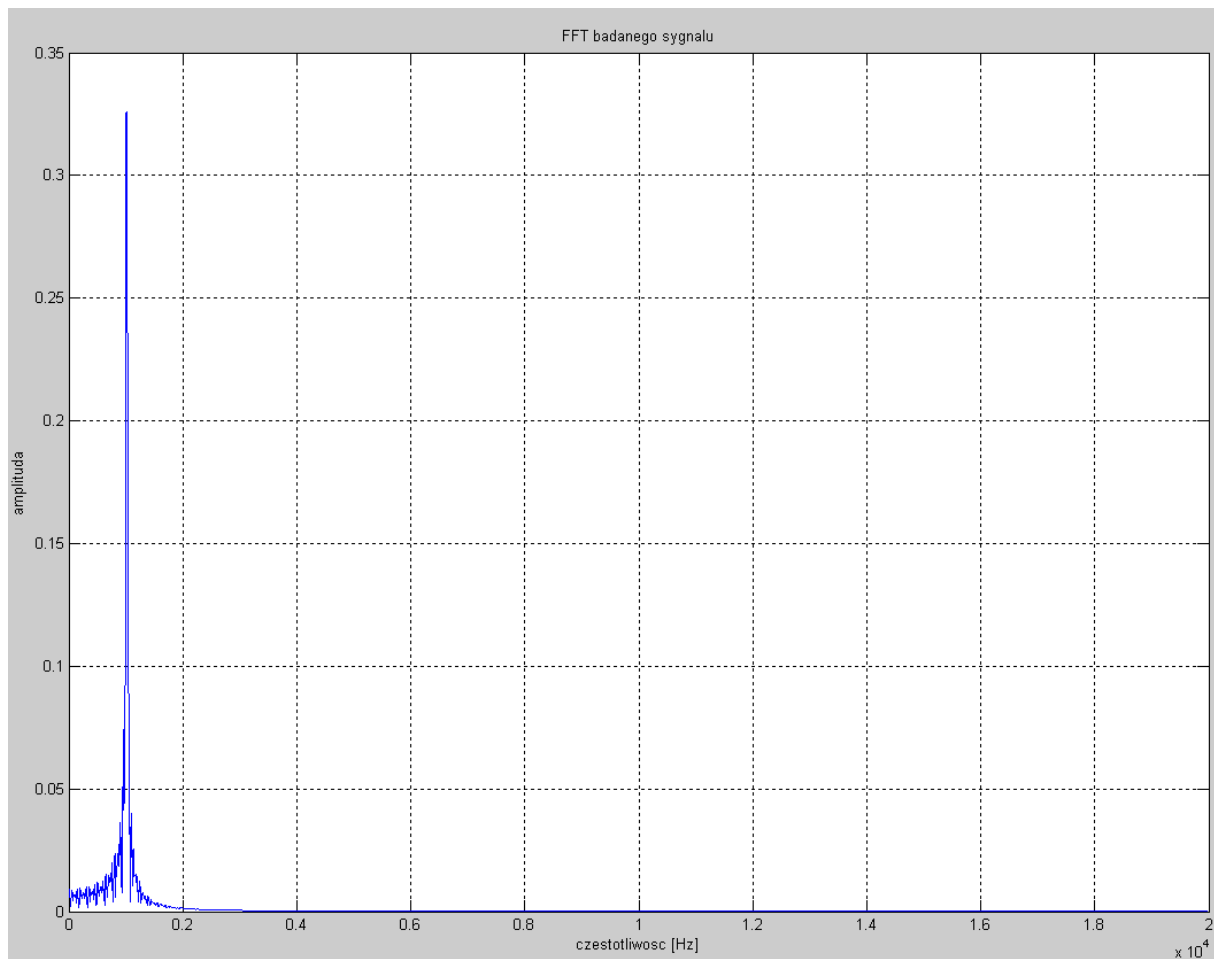
Rys.17 widmo sygnału po przejściu przez filtr Butterwortha N=1

Widzimy wyraźnie widma powielonych informacji – filtr ma tak duży rozrzut, że nie jest w stanie ich właściwie wytłumić. Odbija się to na sygnale, który zostaje zniekształcony:

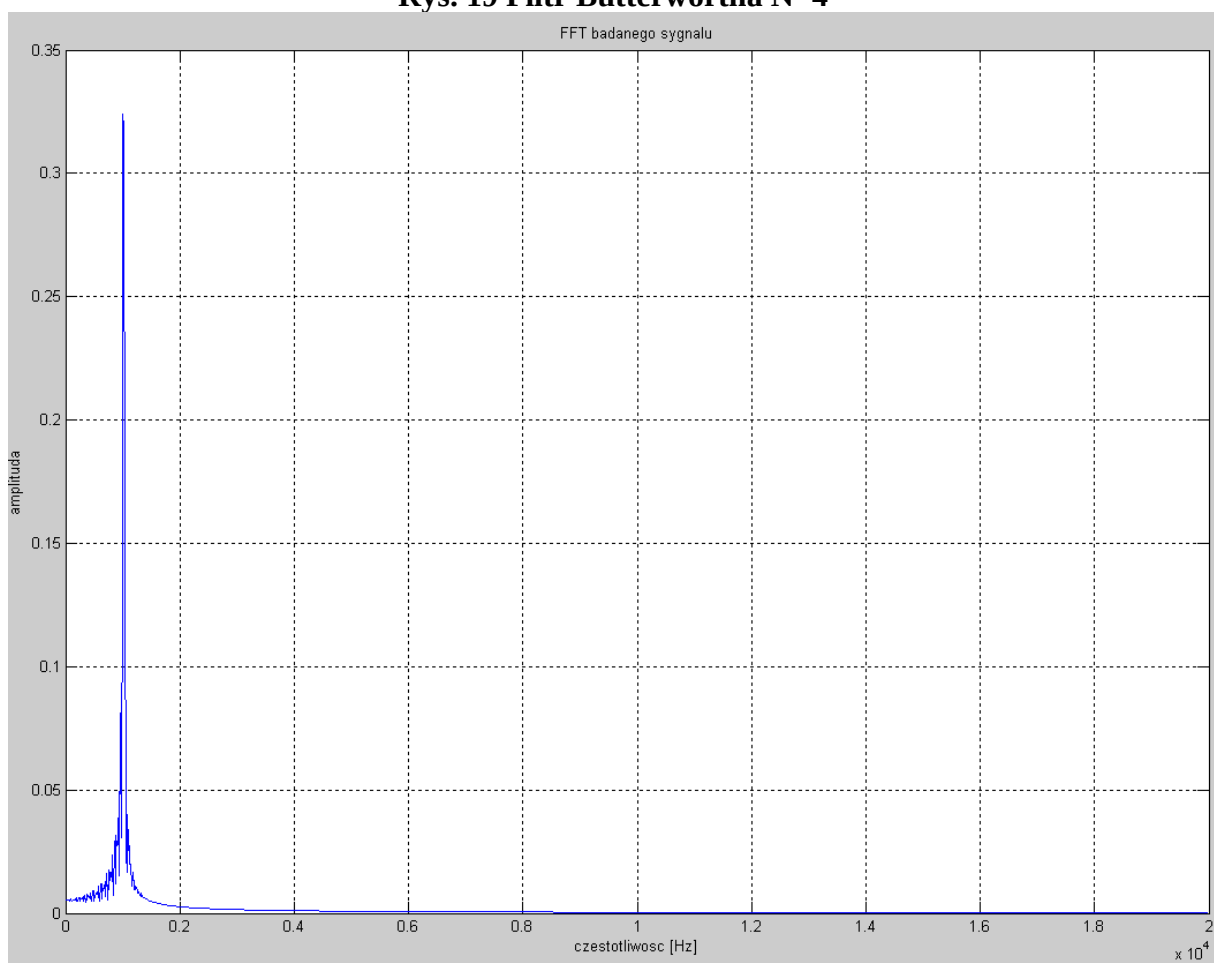


Rys. 18 Zniekształcony sinus

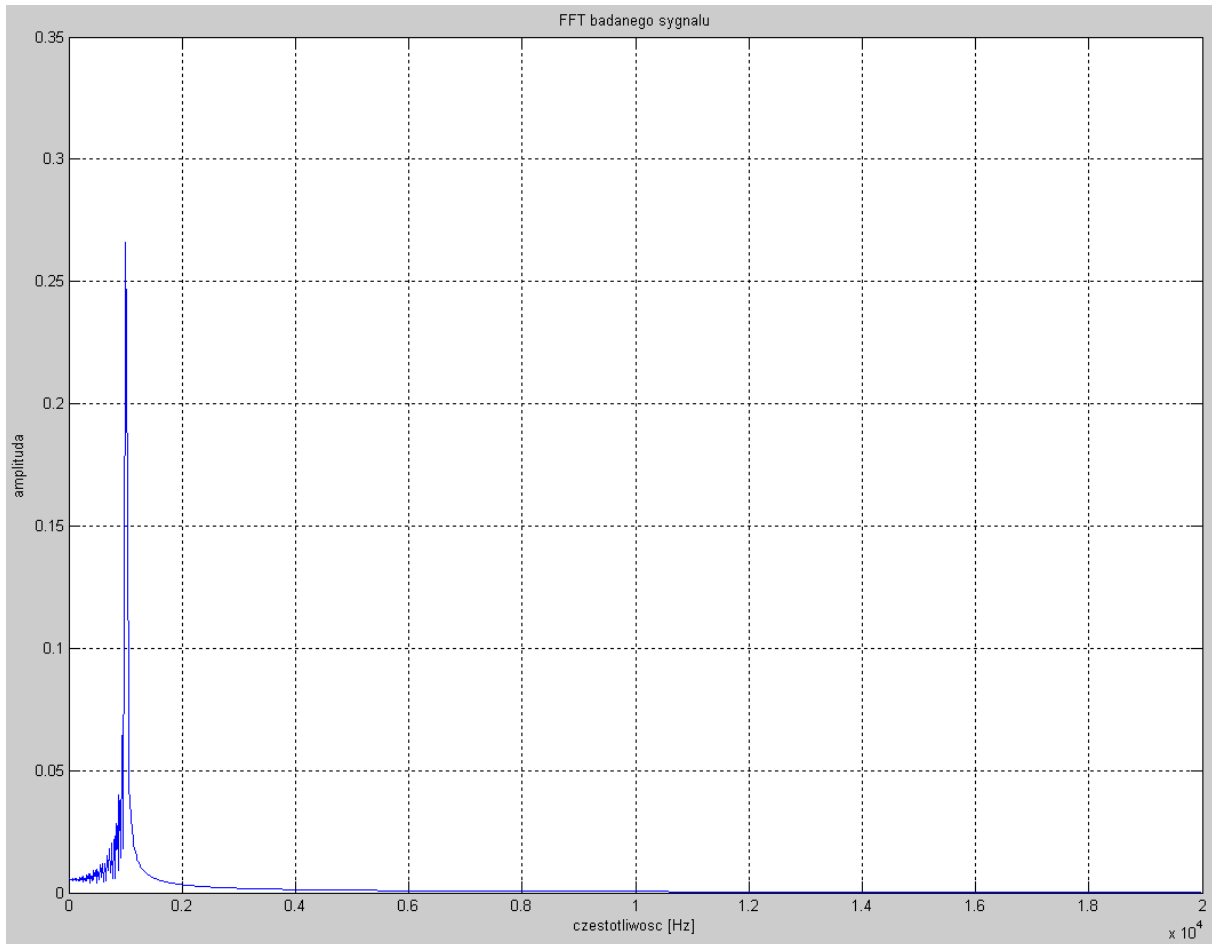
Wprawdzie nie jest to ani aliasing, ani żaden poważny problem – jedyne co trzeba zapamiętać to to, że **filtr 1 rzędu de fakto nie powinien być stosowany, gdyż nie posiada właściwej stromości zbocza**. Gdy wzrośnie rząd filtru poprawią się jego właściwości. Dla porównania kilka widm dla różnych rzędów filtru:



Rys. 19 Filtr Butterwortha N=4



Rys. 19 Filtr Butterwortha N=10



Rys. 19 Filtr Butterwortha N=50

Jak widać rozsądnie jest budować filtry rzędu 3-4, ponieważ wyższe rzędy dają efekt nadmiernego wycięcia widma, co w praktyce nie jest potrzebne. Rząd filtru oblicza się na podstawie wzoru:

$$N \geq \frac{\log \frac{10^{\frac{R_p}{20}} - 1}{10^{\frac{A_s}{20}} - 1}}{2 \log \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right)}$$

gdzie:

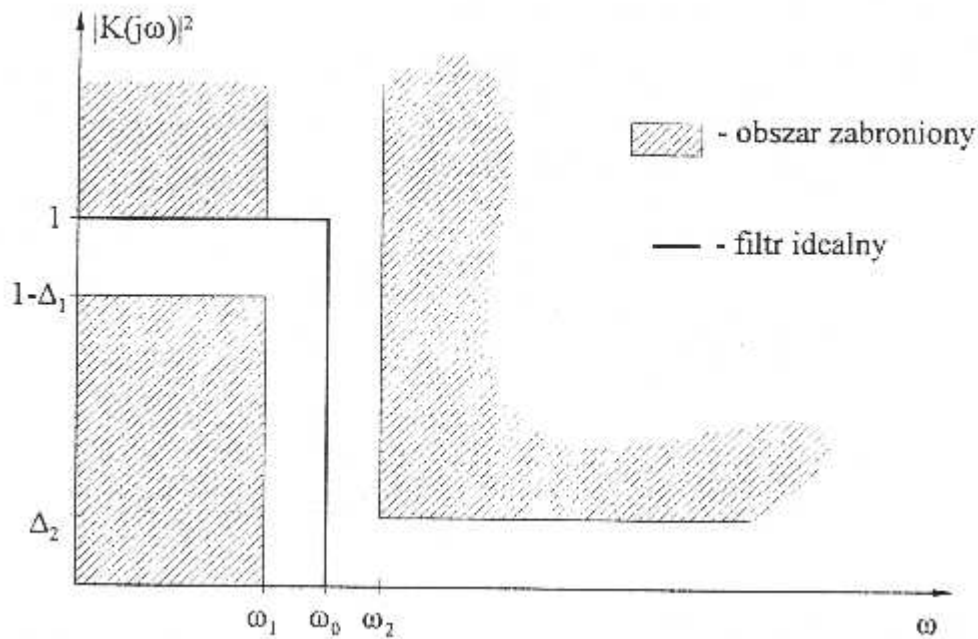
$$R_p = 20 \log \left(\frac{1}{1 - \Delta_1} \right)$$

$1 - \Delta_1$ – tolerancja filtru – patrz rysunek 20

$$A_s = 20 \log \left(\frac{1}{\Delta_2} \right)$$

Δ_2 – tolerancja filtru – patrz rysunek 20

ω_1, ω_2 – tolerancje filtru – patrz rysunek 20



Rys. 20 ch-ka częstotliwościowa filtra – podstawowe dane do projektowania

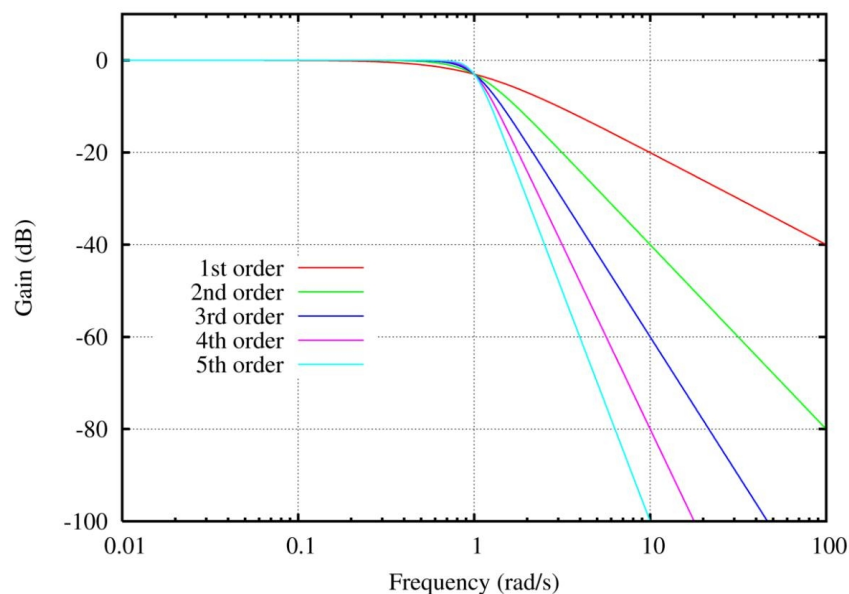
Wróćmy jeszcze na chwilę do wzoru na kwadrat charakterystyki amplitudowej filtra. Rozkładając go w szereg Maclaurina otrzymujemy:

$$H^2(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{4N} - \dots$$

Z wzoru wynika że:

- ✓ Wszystkie pochodne kwadratu charakterystyki amplitudowej względem pulsacji aż do rzędu $2N-1$ zerują się dla $\omega=0$. Dlatego filtry Butterwortha nazywane są filtrami o maksymalnie płaskiej charakterystyce amplitudowej w paśmie przepuszczenia.
- ✓ Filtr Butterwortha jest filtrem o maksymalnie płaskiej charakterystyce także w paśmie zaporowym.

Charakterystykę amplitudową filtra w skali logarytmicznej (wykres Bodego) przedstawia rysunek:



Rys. 21 Charakterystyka amplitudowa filtra Butterwortha w skali logarytmicznej

Dla potrzeb syntezy filtra potrzeba wyznaczyć jego transmitancję. Przeprowadza się to określając bieguny transmitancji filtra, przeprowadzając eliminację biegunów o dodatnich

częściach rzeczywistych (które powodowałyby niestabilność filtru) i ostatecznie określa transmitancję:

$$s_k = \omega_0 \exp\left(j\pi \frac{2k + N - 1}{2N}\right)$$

gdzie: $k=1,2,\dots,2n$

$$K(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)\dots(s - s_n)}$$

Na podstawie wyznaczonych transmitancji dokonuje się syntezy filtrów np. stosując struktury Foster'a i Cauera.

FILTR CZEBYSZEWA

Kwadrat charakterystyki amplitudowej dolnoprzepustowego filtru Czebyszewa dany jest wzorem:

$$H^2(\omega) = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Funkcja $T_N(x)$ jest to wielomian Czebyszewa rzędu N (w literaturze spotyka się też określenie jej mianem funkcji falistej Czebyszewa). Pulsacja ω_0 stanowi krawędź pasma przepustowego filtru. Parametr ε określa stopień zafalowania charakterystyki amplitudowej filtru w paśmie przepuszczania. Wielomian Czebyszewa rzędu N definiowany jest następująco:

$$T_N(\omega) = \cos[N \cos^{-1}(\omega)]$$

dla:

$$|\omega| \leq 1$$

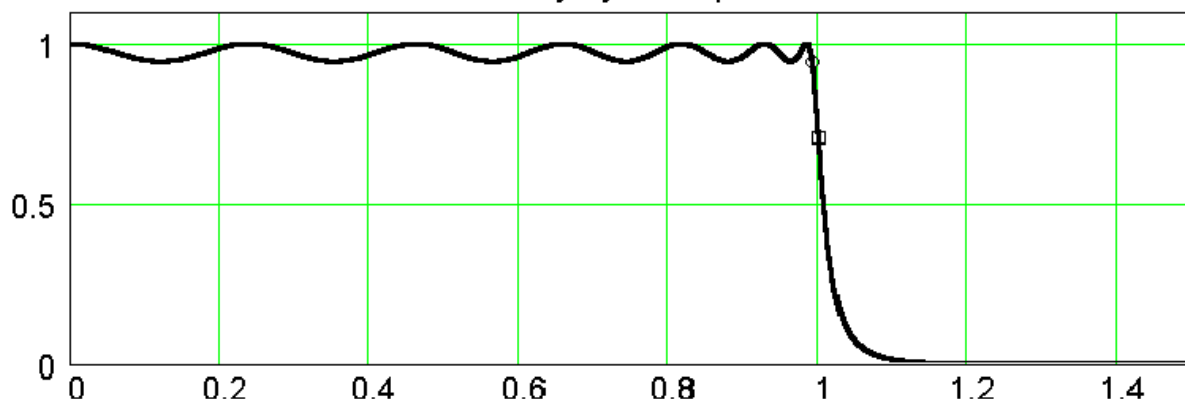
obowiązuje nieco zmieniony wzór:

$$T_N(\omega) = \cosh[N \cosh^{-1}(\omega)]$$

Co z tych wzorów wynika? Otóż można z nich wyczytać dwie najważniejsze cechy filtrów Czebyszewa:

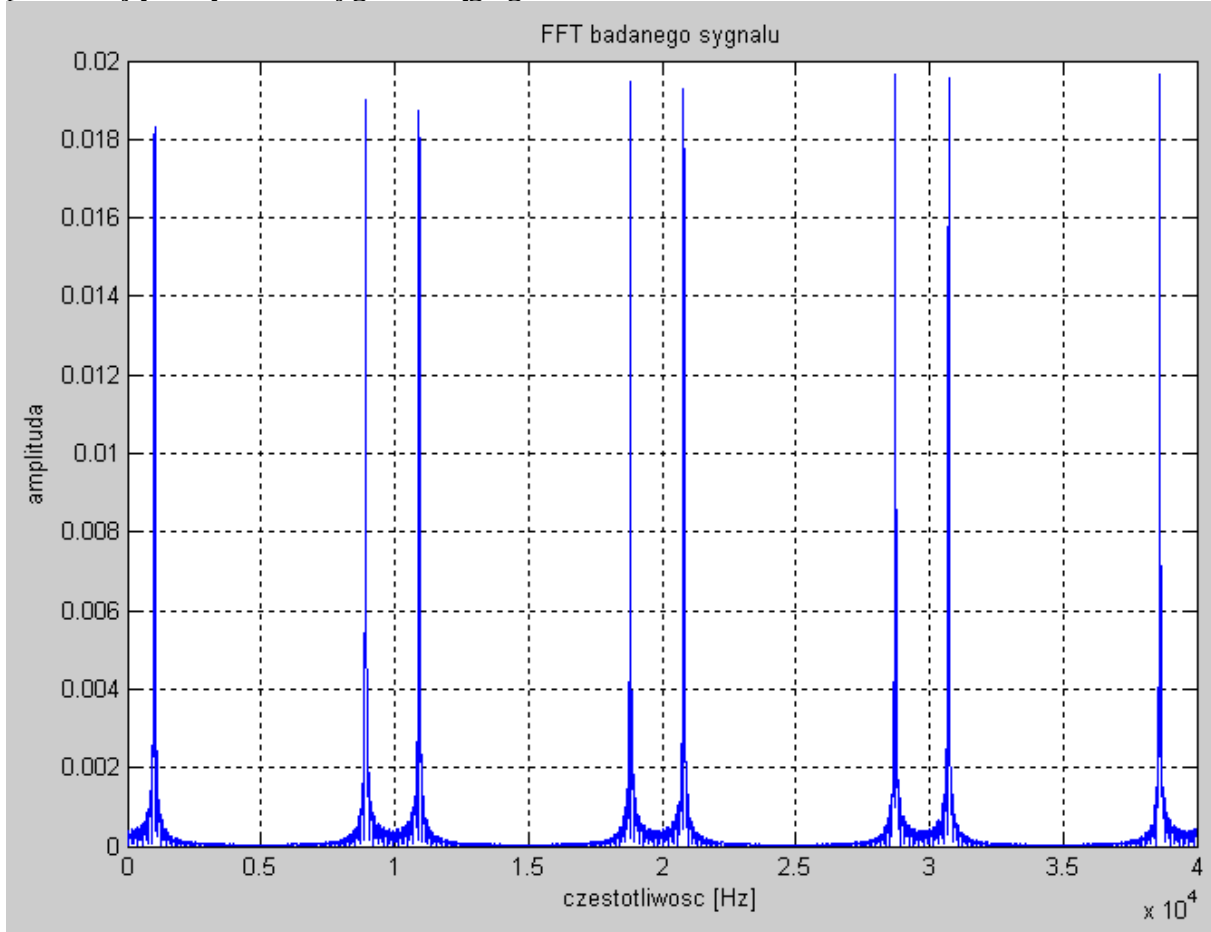
- ✓ Filtry te posiadają równomierne zafalowania charakterystyki amplitudowej w paśmie przepuszczania, wprowadzają więc pewne zniekształcenia sygnałów.
- ✓ Mają one za to bardzo strome przejście z pasma przepustowego do zaporowego. Dodatkowo posiadają płaską charakterystykę w paśmie zaporowym, tłumią więc znacznie sprawniej niż filtry o aproksymacji Butterwortha.

Charakterystyka amplitudowa



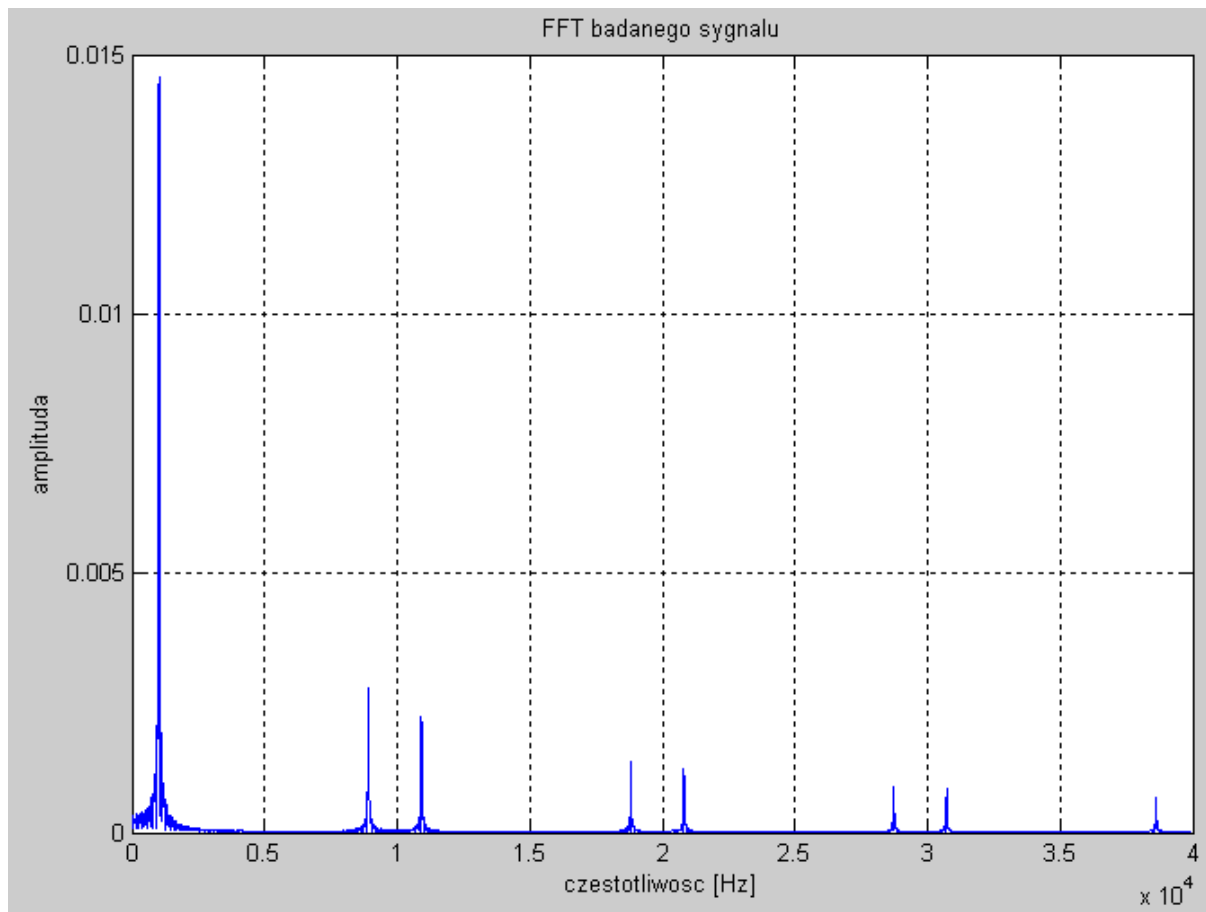
Rys.22 Charakterystyka amplitudowa filtra Czebyszewa

Sprawdźmy więc jak wpływa rząd filtra na jakość filtrowanych sygnałów. Również należy wyciągnąć wnioski dotyczące właściwości aproksymacji. W tym celu przeprowadziliśmy próbkowanie sygnału sinusoidalnego o częstotliwości 1kHz sygnałem pikowym o wypełnieniu 1% z częstotliwością próbkowania równa 10 krotnej częstotliwości sygnału informacyjnego czyli z $f=10\text{kHz}$. Zatem każdy okres sinusa przedstawiany jest za pomocą ciągu 10 próbek. Widmo sygnału spróbkowanego zgodnie z teorią przyjęło okresowo powtarzające się widmo sygnału ciągłego:



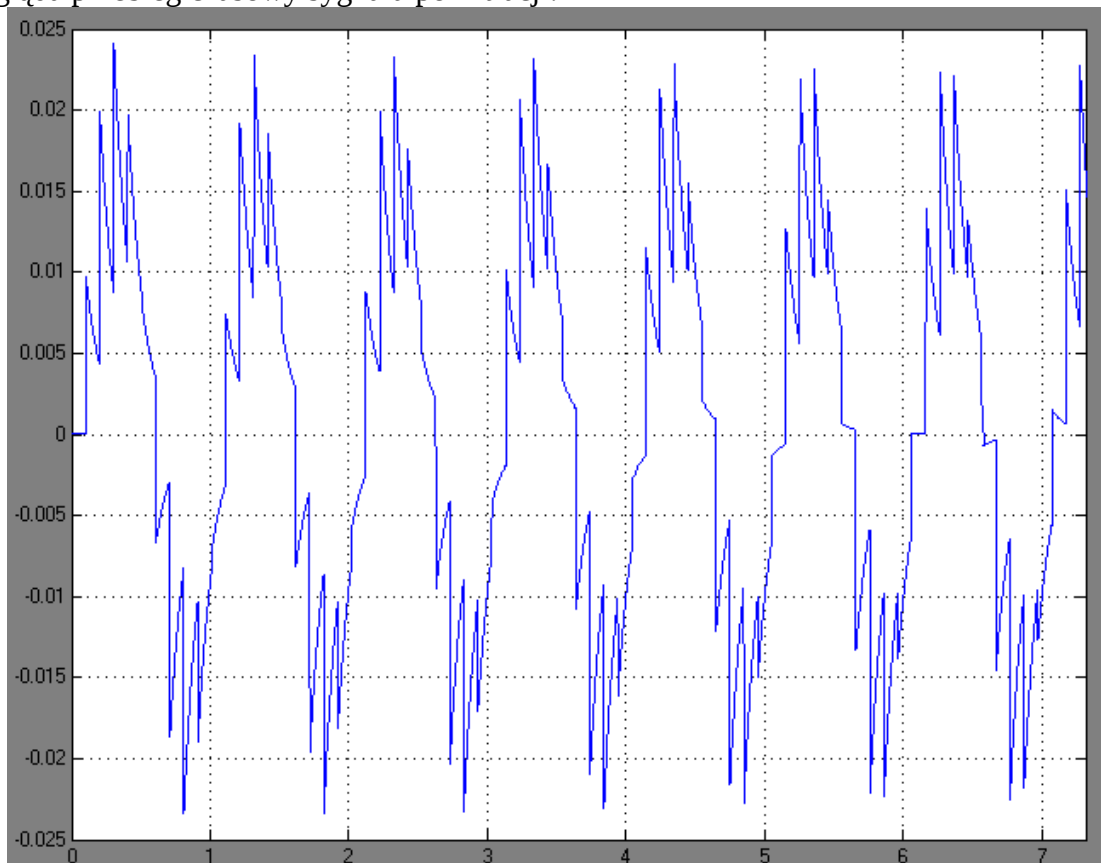
Rys.23 widmo sygnału spróbkowanego

Następnie odfilterowaliśmy sygnał filtrem o rzędzie pierwszym i częstotliwości odcięcia równej 1000 Hz. Otrzymaliśmy następujące widmo sygnału:



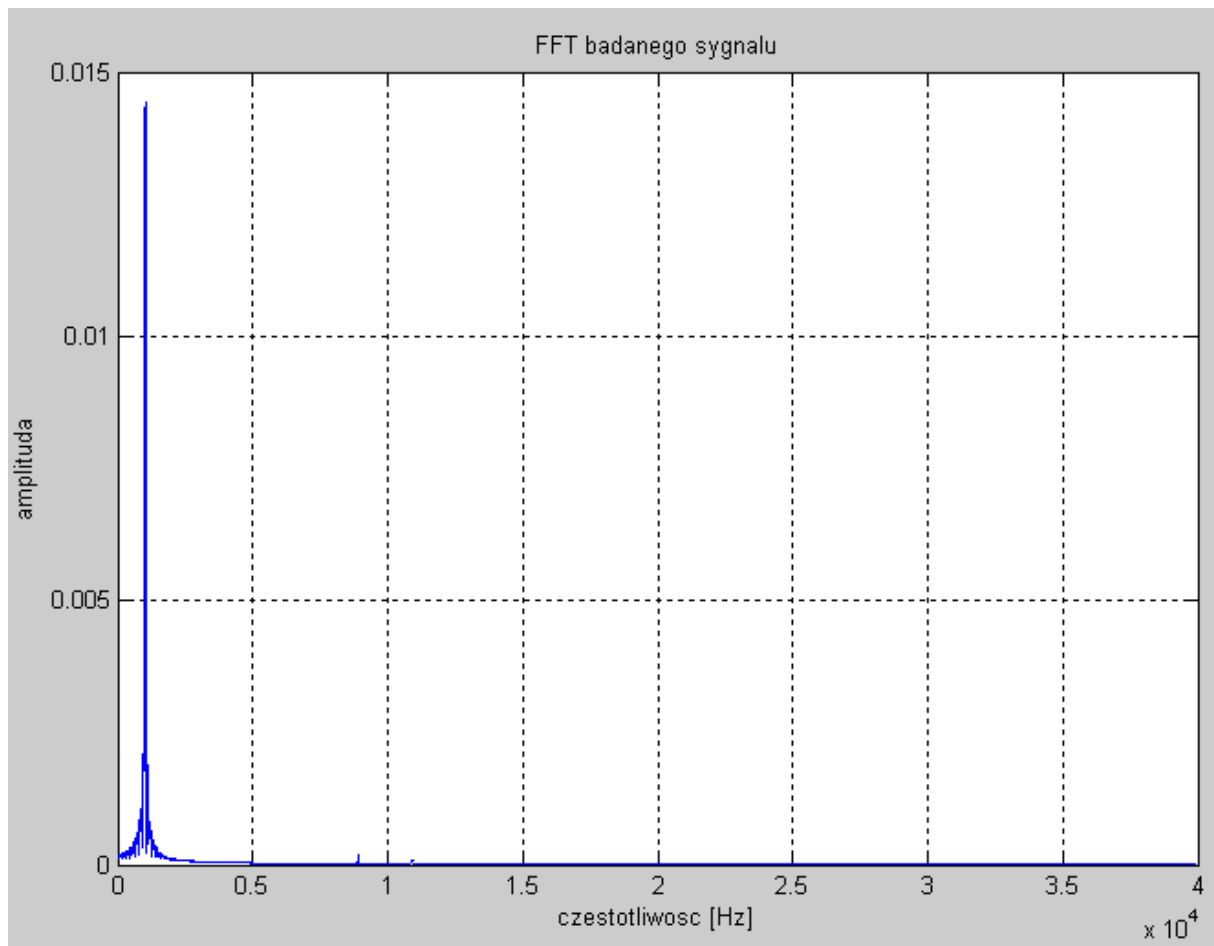
Rys.24 Widmo sygnału odfiltrowanego dla rzędu N=1 filtra Czebyszewa

Jak widać w widmie pozostały jeszcze szczątkowe informacje powielone, zobaczymy jak wygląda przebieg czasowy sygnału po filtracji:

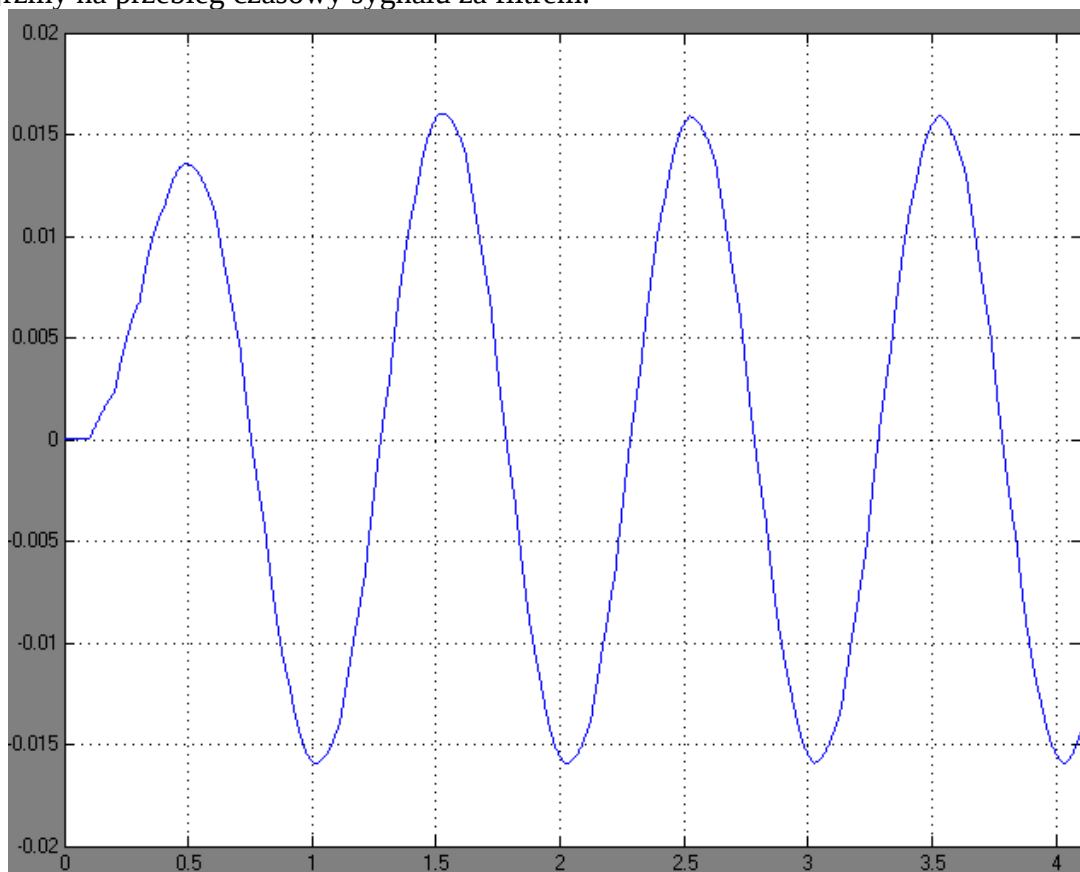


Rys. 25 Sygnał po filtracji

Jak widać sygnał jest silnie zniekształcony, zwiększymy zatem rząd filtru do N=2. Otrzymamy przebiegi:

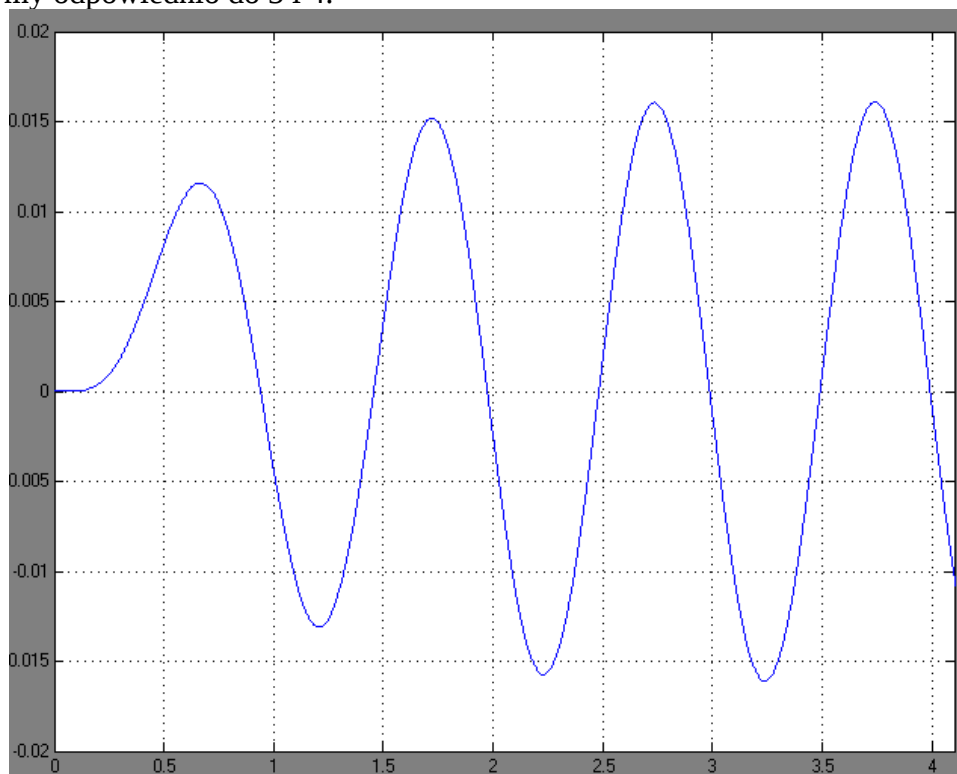


Rys. 26 Widmo sygnału odfiltrowanego dla rzędu $N=2$ filtru Czebyszewa
Widzimy że w widmie nie występują już prawie żadne zakłócenia! A to dopiero 2 rząd filtru. Spójrzmy na przebieg czasowy sygnału za filtrem:

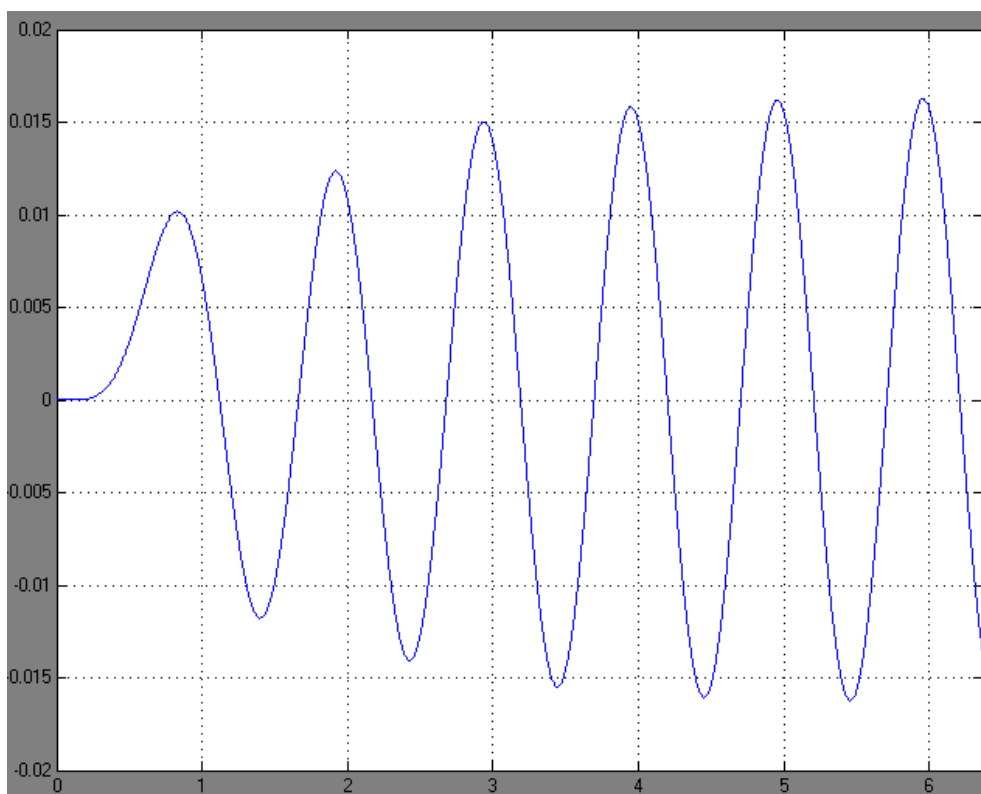


Rys. 27 Sygnał po odfiltrowaniu filtrem 2 rzędu

Widzimy zatem, że sygnał ma oczekiwany kształt, bardzo niewielkie zniekształcenia i jest dokładnie taki o jaki nam chodziło. Z początku widzimy stan nieustalony – fizycznie odpowiadał on będzie ładowaniu się kondensatorów filtru, ustalaniu napięć. Stan ten jest tym większy (dłużej trwa) im wyższy jest rząd filtru, a tym samym więcej jest elementów wprowadzających bezwładność w układzie. Zobaczmy co stanie się gdy rząd filtru zwiększymy odpowiednio do 3 i 4:

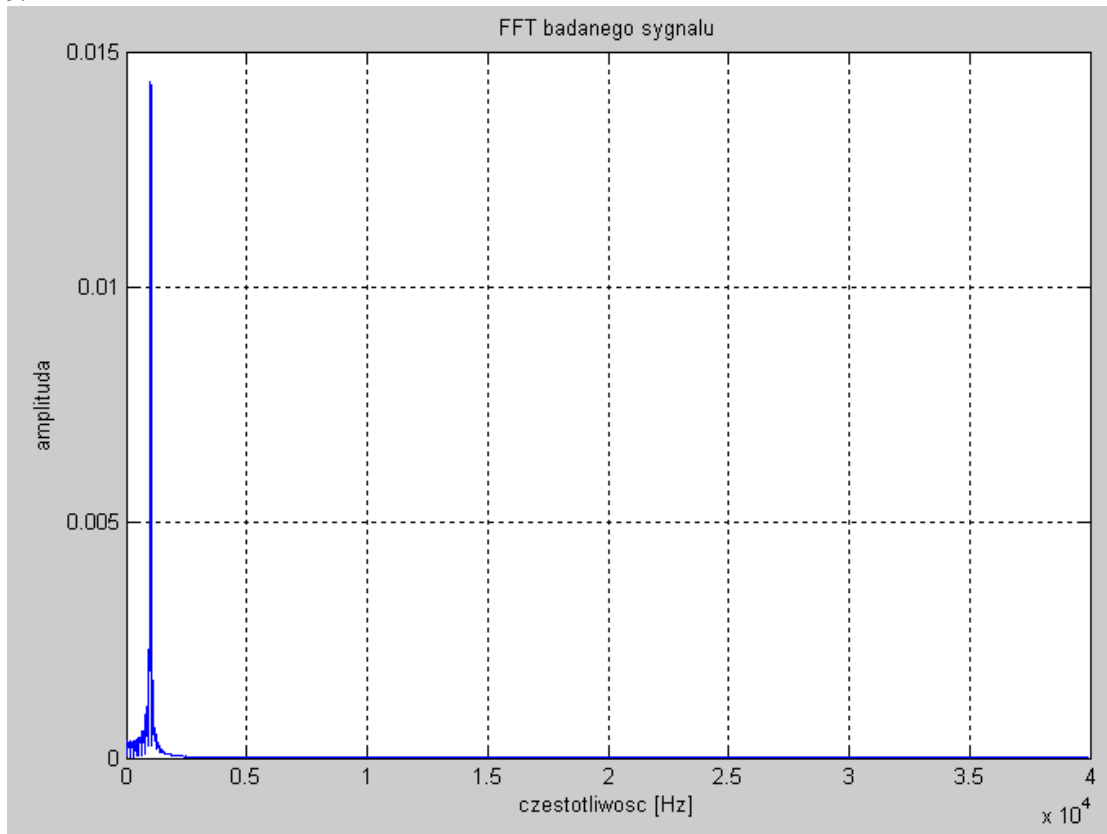


Rys. 28 Filtracja za pomocą filtru rzędu 3

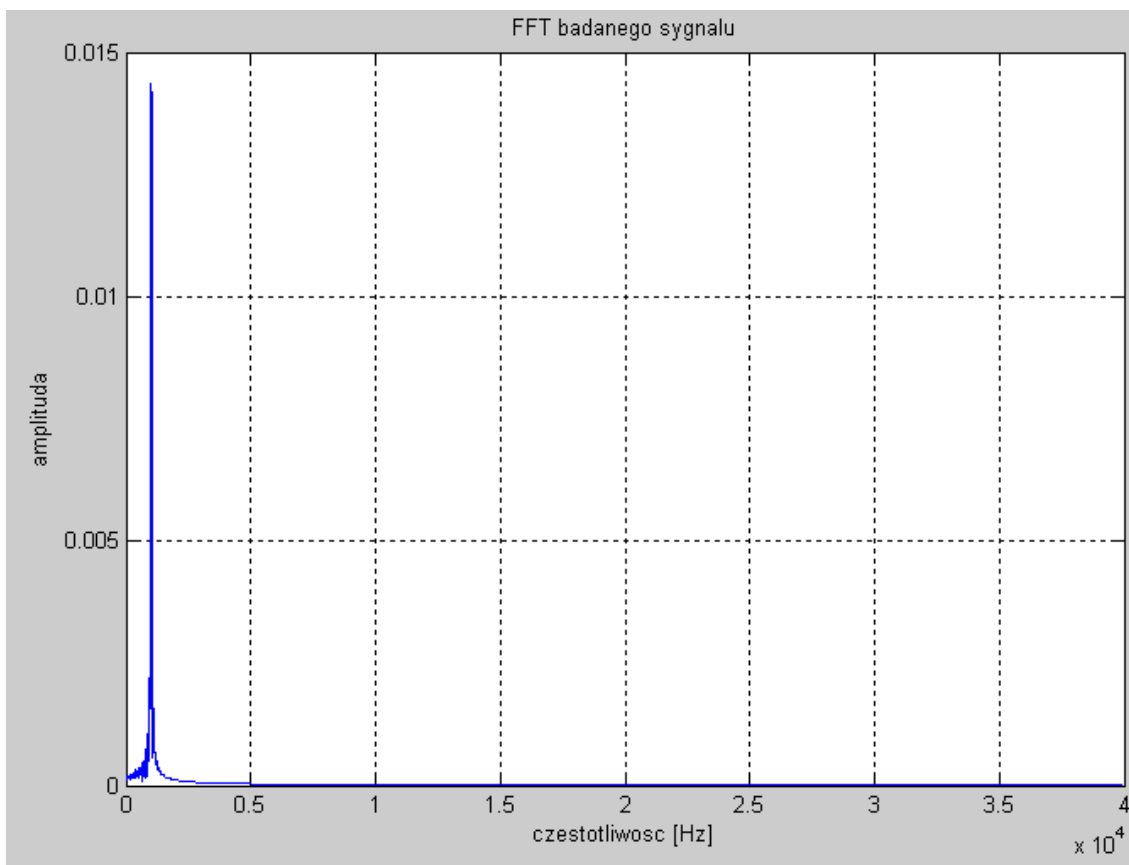


Rys. 29 Filtracja za pomocą filtru rzędu 4

Widzimy zatem, że przebiegi mają idealnie sinusoidalny kształt, jednak przy wyższym rzędzie wydłużył się znacznie czas trwania stanu nieustalonego zwany czasem stabilizacji filtru.



Rys.30 widmo sygnału przefiltrowanego filtrem Czebyszewa rzędu N=3.



Rys.31 widmo sygnału przefiltrowanego filtrem Czebyszewa rzędu N=4.

Widzimy zatem, że obcięcie widma jest bardzo głębokie, jednocześnie tłumienie jest bardzo silne. Pozwala to sformułować następujące wnioski:

- ✓ Wysokie tłumienie filtru oraz jego stroma charakterystyka amplitudowa pozwala na wykonywanie filtrów o niskim rzędzie, a tym samym o niewielkiej liczbie elementów, które w sposób wystarczający odfiltrują niekorzystne zakłócenia z widma sygnału, a jednocześnie zabezpieczają przed powstaniem aliasingu.
 - ✓ Wyższy rząd powoduje wydłużenie stanu nieustalonego tzw. czasu ustalania się filtru.
- Pozostała jeszcze do omówienia kwestia projektowania filtru. Podobnie jak w przypadku filtrów o aproksymacji Butterwortha postępujemy zgodnie z algorytmem:

I. Dobór rzędu filtru

$$n \geq \frac{\operatorname{arch}\left(\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}\right)}{\operatorname{arch}\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)}$$

gdzie:

ε -współczynnik falowania dany wzorem:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{R_p}{10}} - 1}$$

II. Wyznaczanie transmitancji filtru

1) Określamy bieguny transmitancji filtru

$$s_k = \omega_0 \exp\left\{-sha\left[\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right] + jcha\left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right]\right\}$$

Gdzie:

$$a = \pm \frac{1}{n} \operatorname{arch}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

n - rząd filtru

$k=1,2,3,\dots,2n$

- 2) Przeprowadzamy eliminację biegunów o dodatnich rzeczywistych częściach (usuwamy w ten sposób zagrożenie niesatbilnością filtru. Należy też zauważyć, że niebezpiecznym stanem jest pozostawienie zbyt wielu biegunów urojonych – może to doprowadzić do powstania generatora. Jednocześnie należy zauważyć, że większość filtrów podczas syntezy na struktury RC jest już zabezpieczana przed niestabilnością faktem konieczności występowania naprzemiennych zer i biegunów rzeczywistych i urojonych, tak więc eliminacja części rzeczywistych dodatnich jest warunkiem wystarczającym z reguły.) Transmitancję $K(s)$ filtru Czebyszewa określa wzór:

$$K(s) = \frac{1}{\varepsilon 2^{\frac{n-2}{2}} q(s)}$$

gdzie:

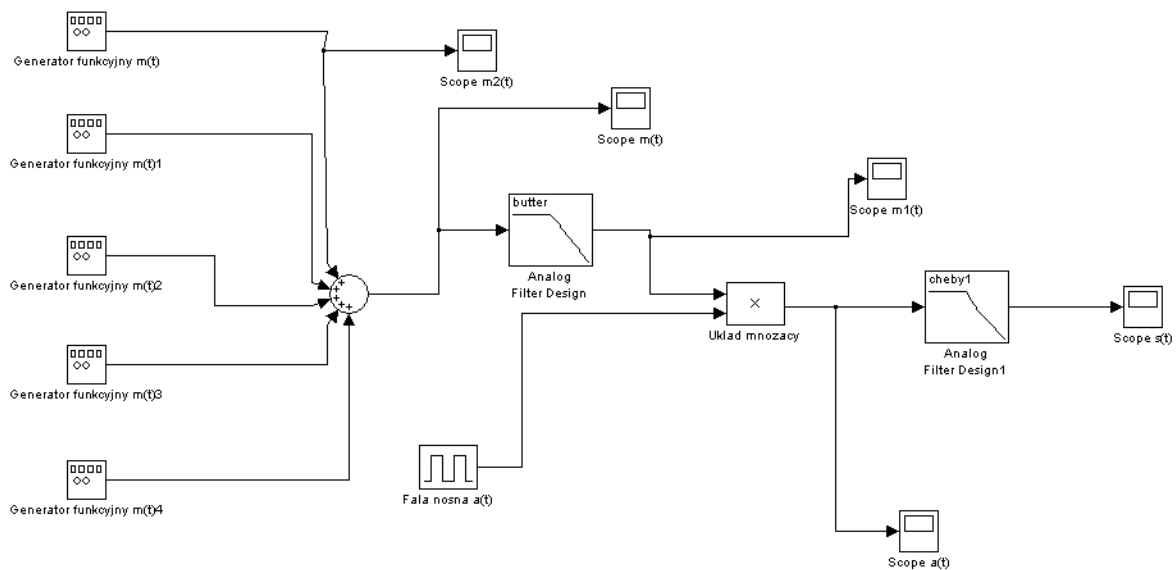
$$q(s) = \sum_{m=0}^n b_m \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^m$$

Obliczenia z wykorzystaniem tych wzorów są przeprowadzane numerycznie. Na końcu dokonujemy syntezy filtru.

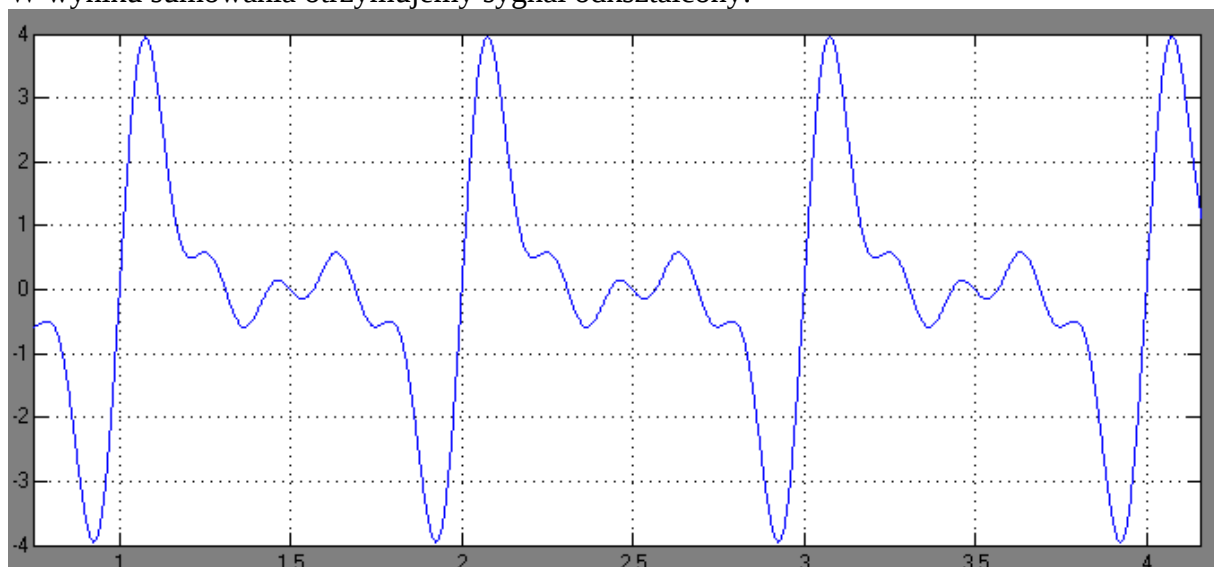
Zadania projektowe

Zagadnienie pierwsze

Sygnal informacyjny stanowi sinusoida o amplitudzie 1 i częstotliwości 1000Hz. Sygnal ten jest zakłócony przez 4 dodatkowe sygnały sinusoidalne o częstotliwościach: 2000, 3000, 4000 i 5000 Hz. Sygnal w rezultacie stanowi sygnał odkształcony. Następnie całość poddawana jest próbkowaniu. Zadanie polega na filtracji sygnału informacyjnego z widma sygnału zakłóconego. Realizuje to układ:

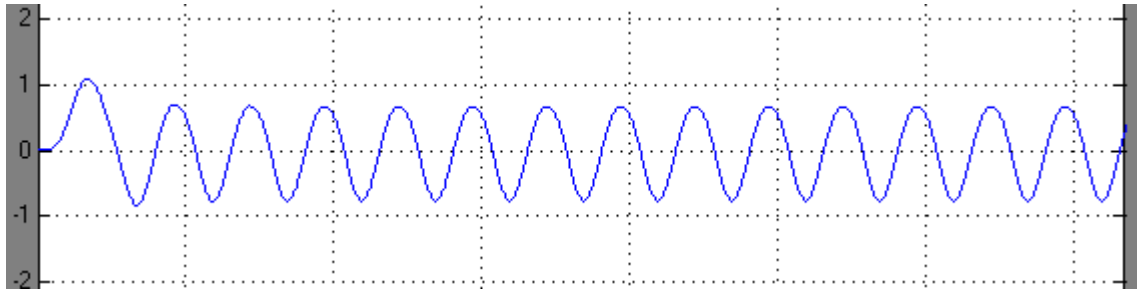


Widzimy tu sygnał informacyjny, który trafia na blok sumacyjny z sygnałami zakłócającymi. W wyniku sumowania otrzymujemy sygnał odkształcony:



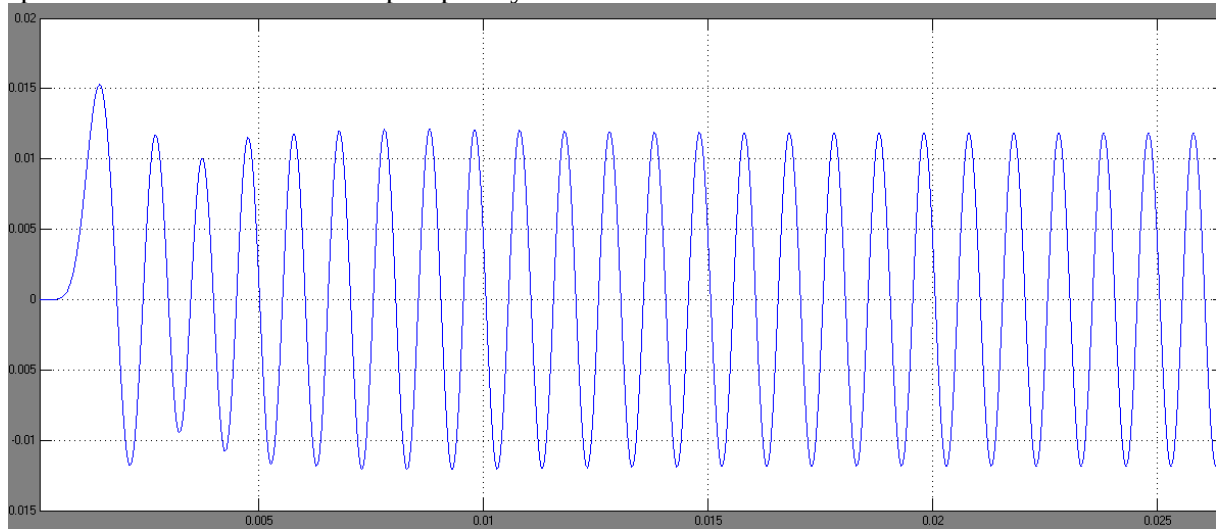
Rys.32 Odształcony sinus

Następnie filtr dolnoprzepustowy o aproksymacjach odpowiednio Butterwortha i Czebyszewa wycina z widma sygnału część niosącą dla nas ważne informacje.



Rys.33 Wycięty sygnał informacyjny

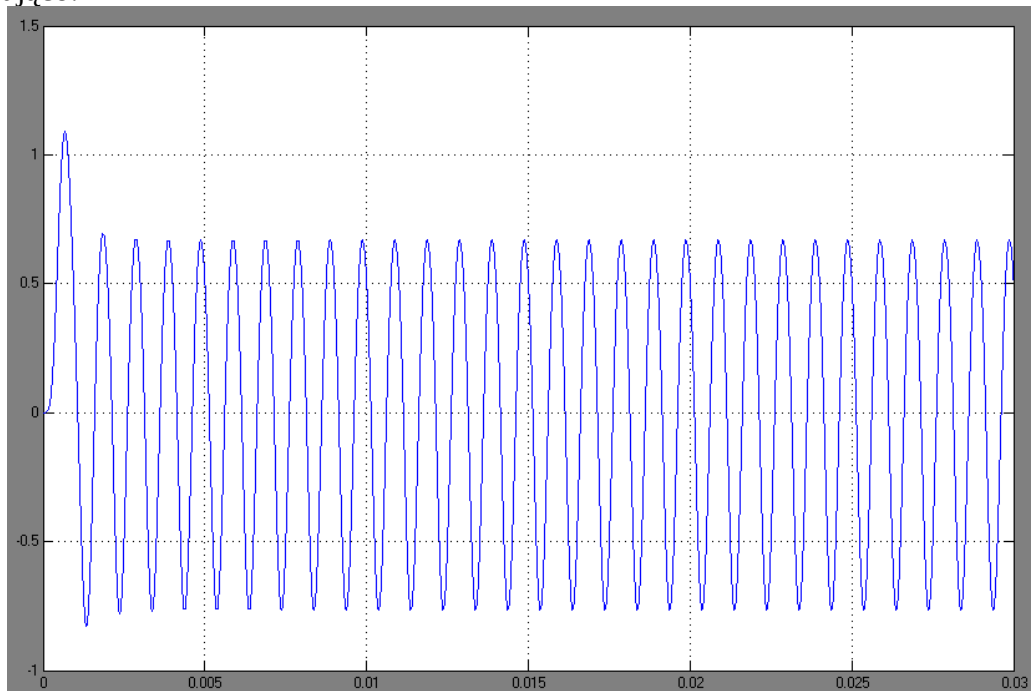
Tylko ta część sygnału zostaje poddawana próbkowaniu. Następnie odzyskujemy sygnał po spróbkowaniu w filtrze dolnoprzepustowym:



Rys. 34 Odzyskany sinus

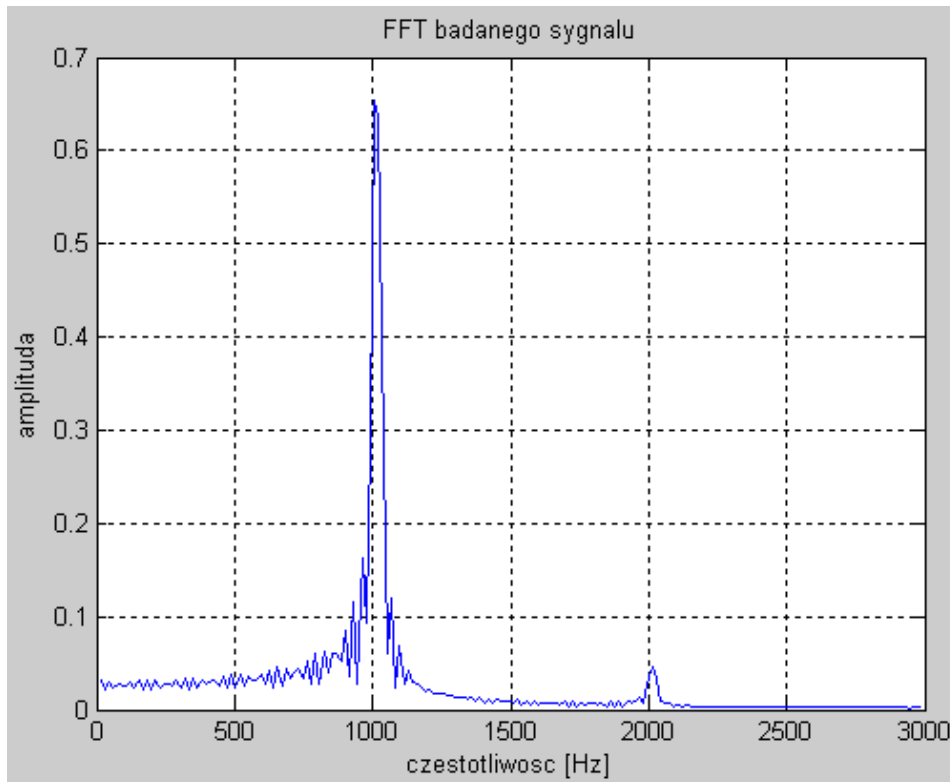
Sygnał jednak stracił na mocy i należy go poddać wzmacnieniu. Przyjrzyjmy się dokładniej pracy filtrów o badanych aproksymacjach.

Sygnał sinusoidalny odfiltrowany z szumu za pomocą filtru Butterwortha 5 rzędu wygląda następująco:



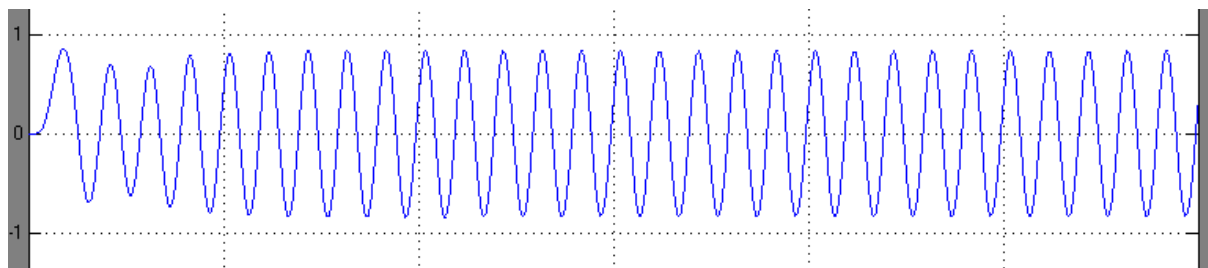
Rys. 35 Filtracja Butterwortha – przebieg czasowy

Widmo sygnału odfiltrowanego przedstawia się następująco:



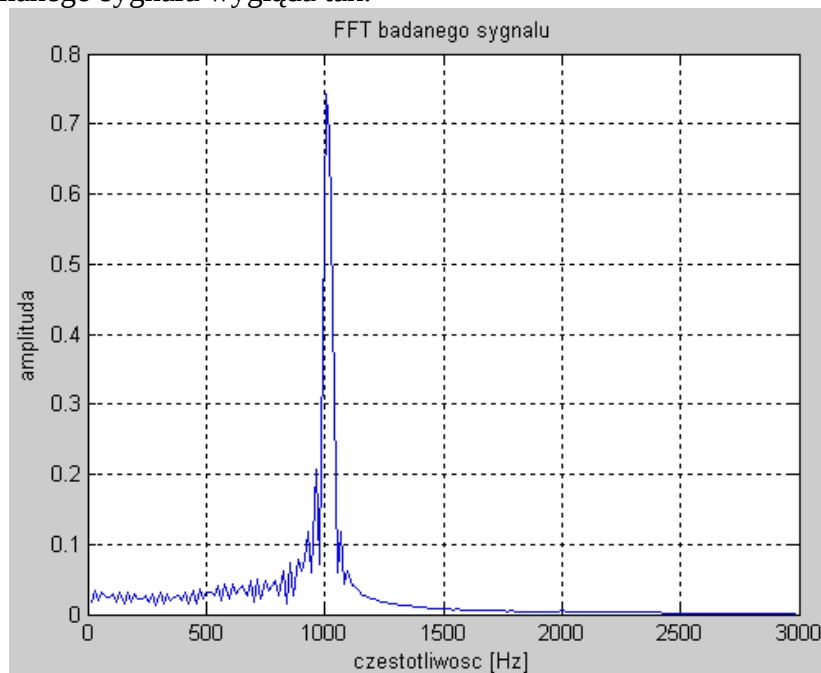
Rys. 36 Widmo sygnału po przejściu przez filtr Butterwortha

W przypadku zastosowania aproksymacji Czebyszewa otrzymaliśmy:



Rys. 37 sygnał po przejściu przez filtr Czebyszewa

Widmo otrzymanego sygnału wygląda tak:

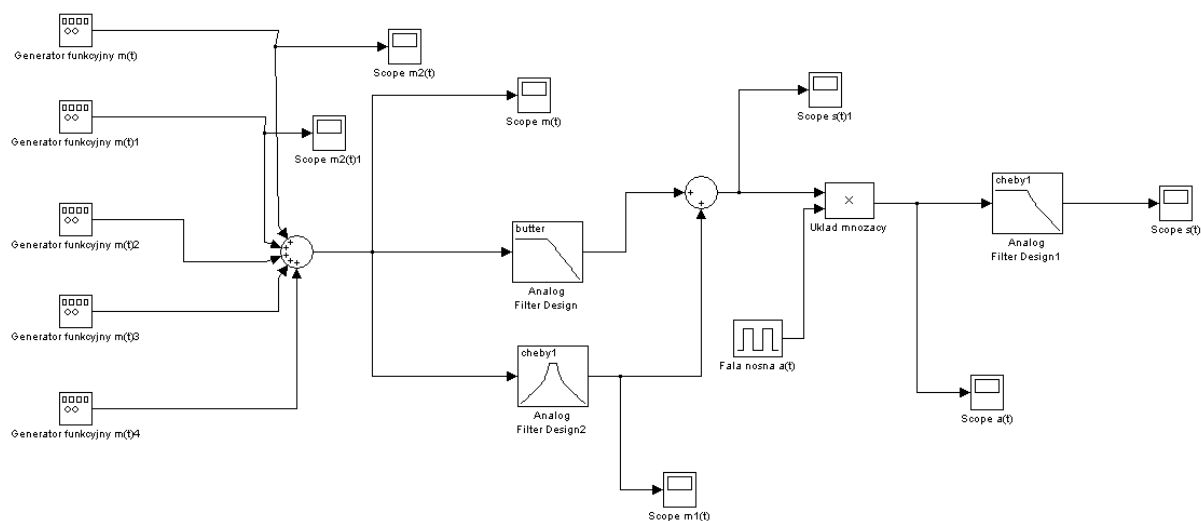


Rys. 38 Widmo sygnału po przejściu przez filtr Czebyszewa

Jak łatwo zauważyć widmo sygnału drugiego jest idealnie wytłumione poza graniczną częstotliwością 1000Hz. W przypadku pierwszej aproksymacji otrzymaliśmy charakterystyczną „górkę” będącą drugą z harmonicznymi sygnału odkształconego (o częstotliwości 2000Hz). Stan ustalania się filtru dla aproksymacji Czebyszewa był znacznie dłuższy, ale nie mieliśmy do czynienia z przesterowaniem (sygnał zawsze było poniżej zadanej wartości 1V). Dla filtru Butterwortha otrzymano przesterowanie, co może świadczyć o niebezpieczeństwie uszkodzenia układu np. przetwornika pomiarowego, dla dużych mocy.

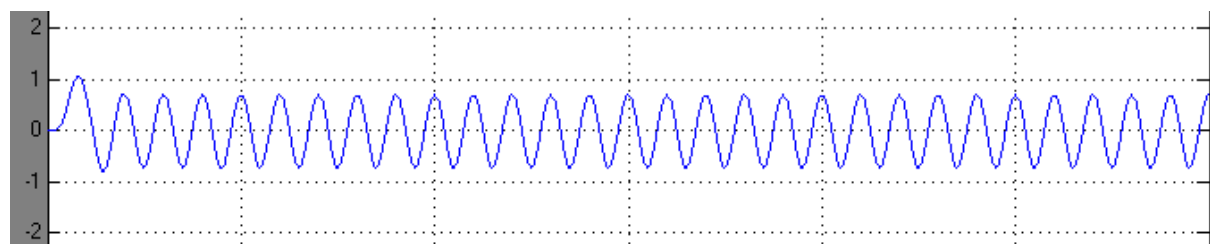
Zagadnienie drugie

Teraz skomplikujmy bardziej sprawę, gdyż zakładamy, że informację niesie sygnał złożony z sumy 2 sygnałów tj. $m(t)$ oraz $m_2(t)$, będących sinusoidami o częstotliwościach 1000Hz oraz 3000Hz i amplitudach 1 i $1/(3\pi)$ [V]. Zrealizujemy to w analogicznym układzie:

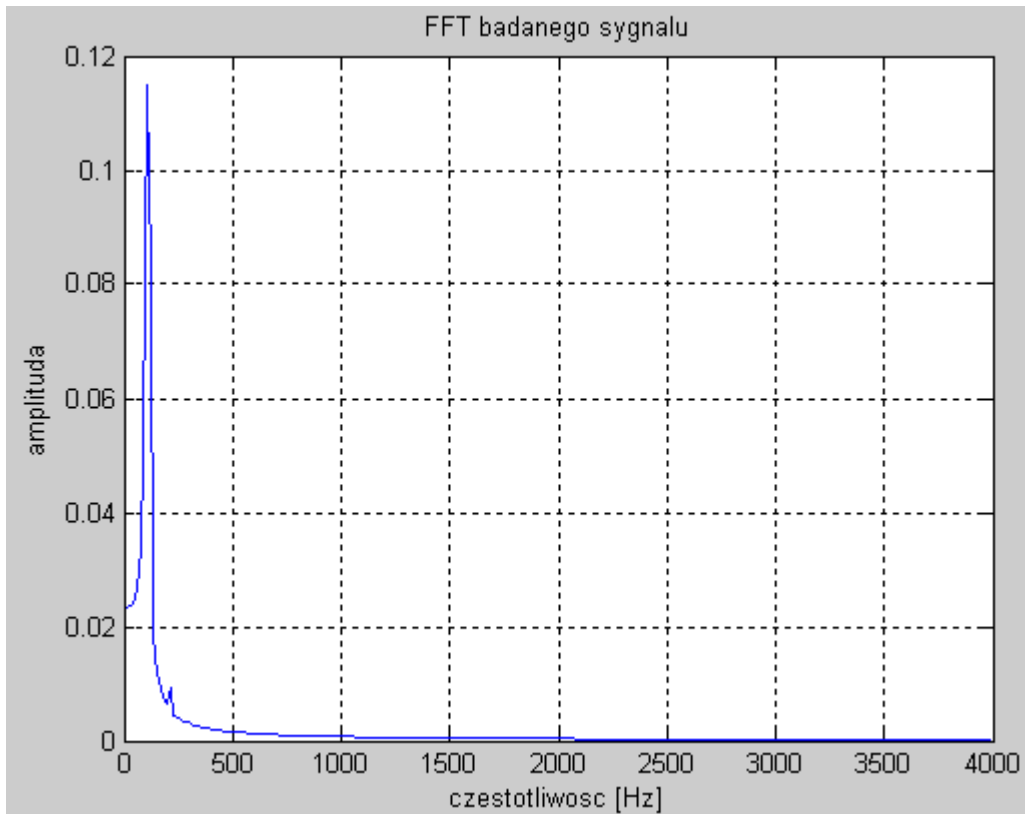


Rys. 39 Model układu filtrującego 2 harmoniczne: 1 i 3.

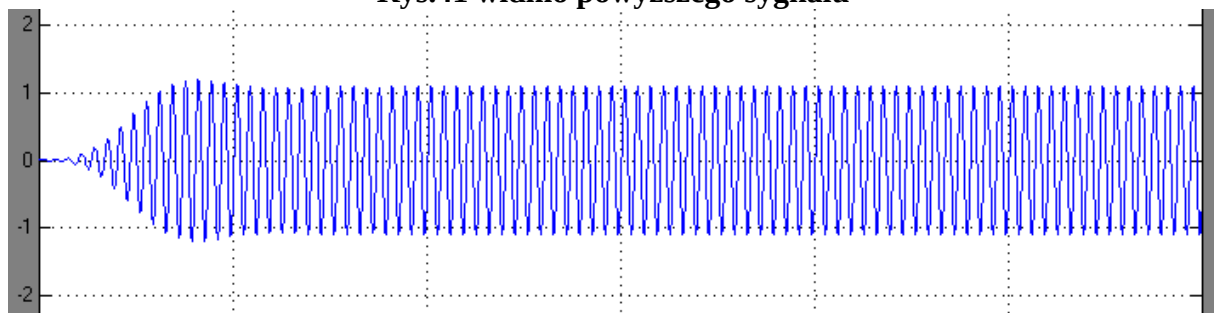
Oba z zastosowanych filtrów są filtrami o aproksymacji Butterwortha – pierwszy to klasyczny dolnoprzepustowy, drugi to środkowoprzepustowy. Ma on za zadanie wyciąć z widma sygnał o częstotliwości 3000Hz. Poniżej widzimy przebiegi czasowe oraz widma mierzonych sygnałów:



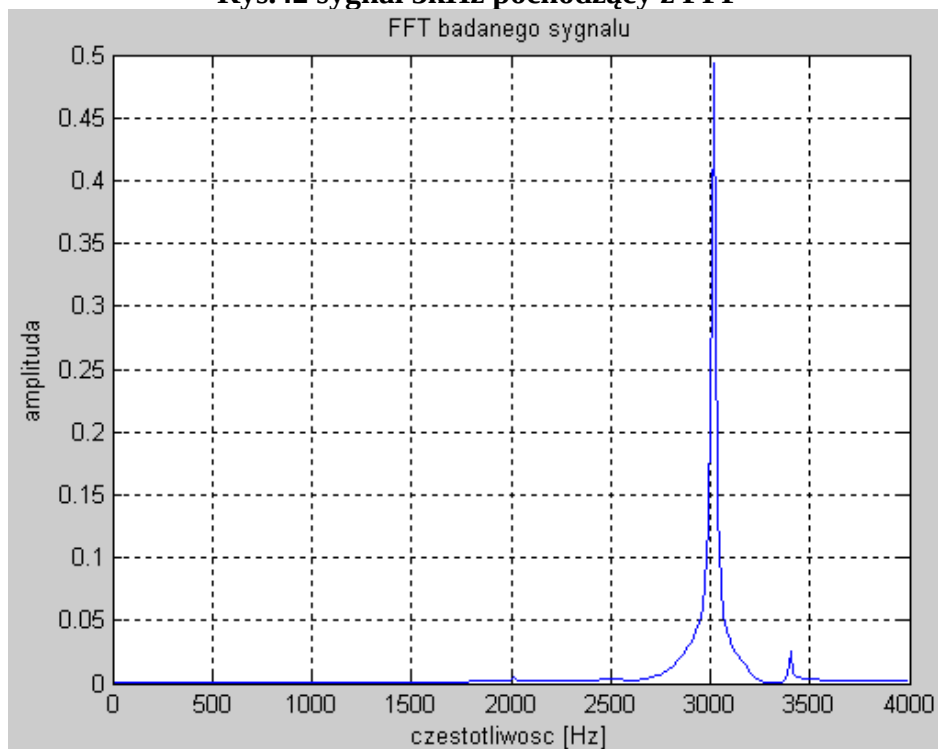
Rys. 40 sinusoida o częstotliwości 1kHz odfiltrowana FDP



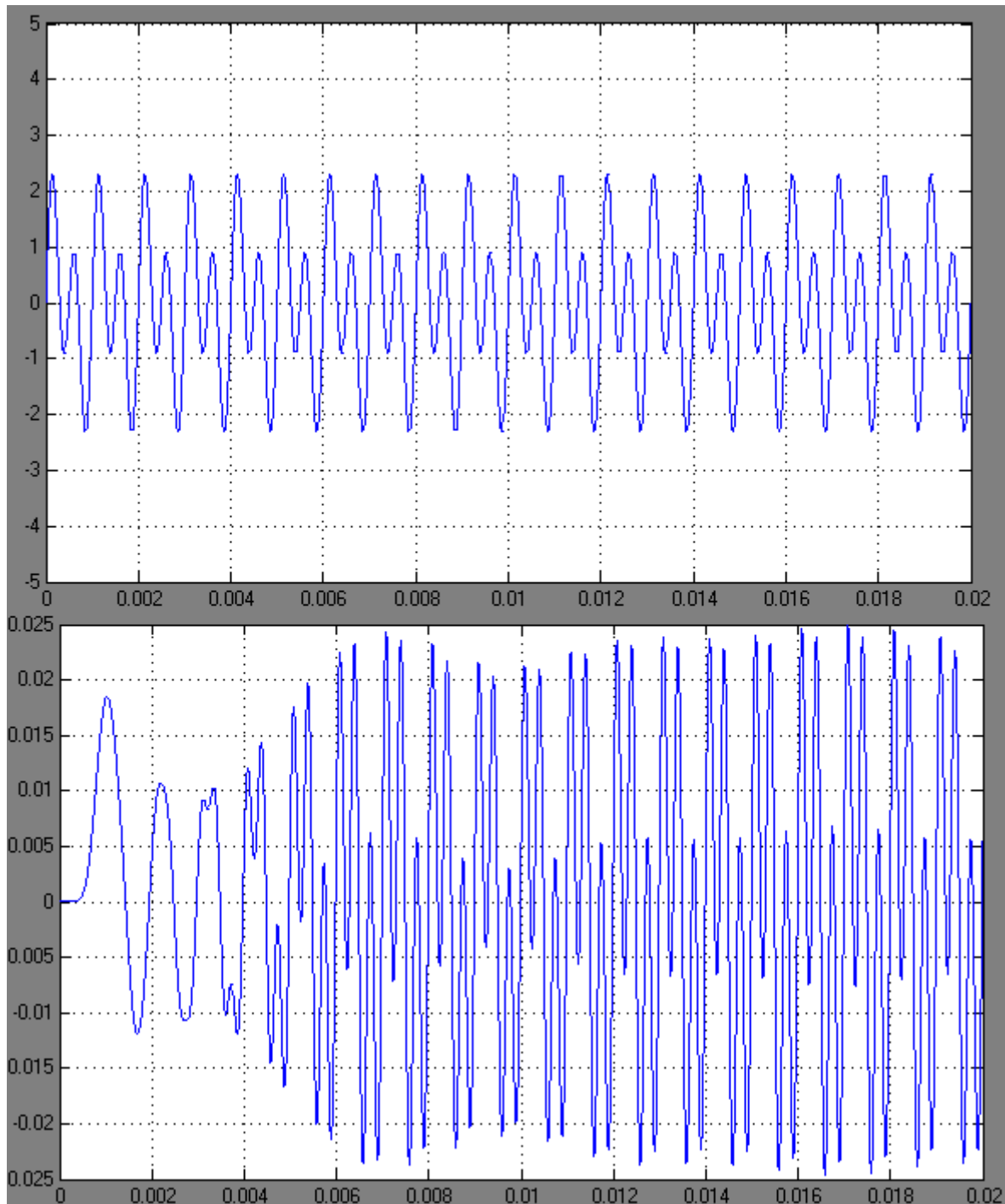
Rys.41 widmo powyższego sygnału



Rys.42 sygnał 3kHz pochodzący z FPP



Rys.43 widmo sygnału 3kHz pochodzącego z FPP



Rys.44 sygnał informacyjny i sygnał odtworzony

Synteza filtra na przykładzie filtra Czebyszewa I rzędu

Przedstawimy teraz zagadnienie projektowe przykładowego filtra. Na początku obliczamy parametry filtra Czebyszewa spełniające następujące wymagania:

- Krawędź pasma przenoszenia $f_p=10\text{kHz}$
- Maksymalne tłumienie sygnału w paśmie przenoszenia 1dB
- Krawędź pasma zaporowego $f_s=17\text{kHz}$
- Minimalne tłumienie w paśmie zaporowym 25dB

Jako rozwiązanie otrzymujemy:

Pulsacja ω_0 odpowiada krawędzi pasma przepuszczania:

$$\omega_0 = \omega_p = 62,831 \cdot 10^3 \text{ rad / s}$$

parametr zafalowań:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\text{dB}} - 1} = 0,50885$$

Rząd filtru:

$$N = \left[\frac{\cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{10^{0.1 \cdot 25dB} - 1}{10^{0.1 \cdot 1dB} - 1}} \right)}{\cosh^{-1}(\omega_s \langle \omega_p \rangle)} \right] = \left[\frac{\cosh^{-1}(34,891)}{\cosh^{-1}(1,7)} \right] = 3,779$$

wartość otrzymana należy zaokrąglić do 4, następnie wyznaczamy transmitancję filtru:

$$H(s) = \frac{0,24565}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^4 + 0,95281 \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3 + 1,45392 \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 0,74262 \left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 0,27563}$$

Mając dany wzór na transmitancję należy ustalić z jakich elementów będzie składał się nasz filtr oraz metodę jego syntezy. Dla przykładu możemy posłużyć się popularnym algorytmem dla filtrów LC wykorzystywanym np. do projektowania filtrów w telekomunikacji. Cewki wykonywane są jako biegnące obok siebie ścieżki, natomiast kondensatory wprowadzane są w postaci elementów SMD lub dwu ścieżek o odpowiednich wymiarach usytuowanych na płycie. Częściej jednak używa się elementów SMD.

Na początku mianownik znormalizowanej transmitancji dzielimy na część parzystą i nieparzystą, a następnie dokonujemy dzielenia zgodnie z metodami Cauera prowadzącymi odpowiednio do wyznaczenia wszystkich parametrów filtru w układzie ze źródłem o jednostkowej oporności wewnętrznej, np. 200Ω:

$$4,0708s^4 + 5,9186s^2 + 1,1220 \div 3,8787s^3 + 3,0230s = 1,0495s = sL_1$$

$$-4,0708s^4 - 3,1727s^2$$

$$2,7459s^2 + 1,1220$$

$$3,8787s^3 + 3,0230s \div 2,7459s^2 + 1,1220 = 1,4125s = sC_2$$

$$-3,8787s^3 - 1,5849s$$

$$1,4381s$$

$$2,7459s^2 + 1,1220 \div 1,4381s = 1,9094s = sL_3$$

$$-2,7459s^2$$

zostaje wyraz wolny, który po wydzieleniu da:

$$sC_4 = 1,2817s$$

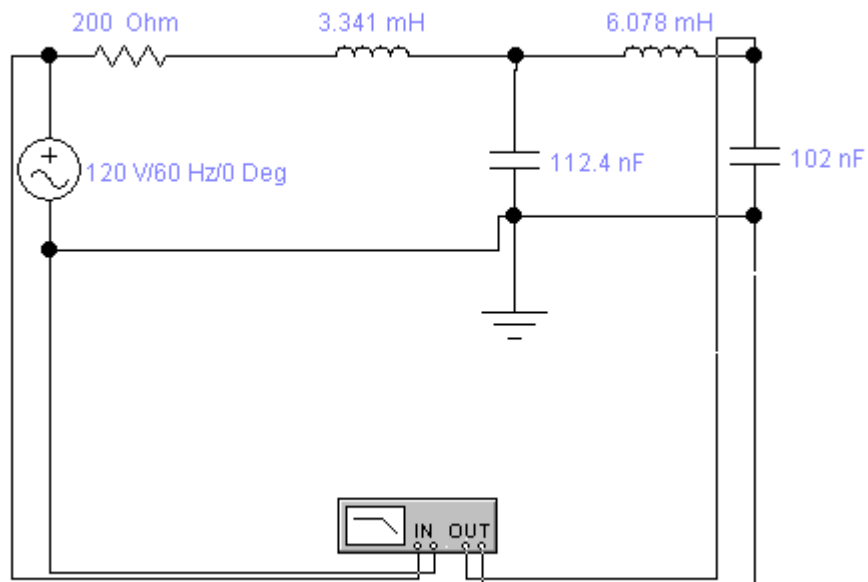
Ostatnim krokiem jest denormalizacja wartości pojemności i indukcyjności. Wykonujemy ją dzieląc każdą z otrzymanych wyżej pojemności ogólnych przez $\omega_0 R$ oraz dla indukcyjności mnożąc przez R i dzieląc przez ω_0 . Prowadzi ona do uzyskania następujących wyników:

$$L_1 = 3,341mH$$

$$L_3 = 6,078mH$$

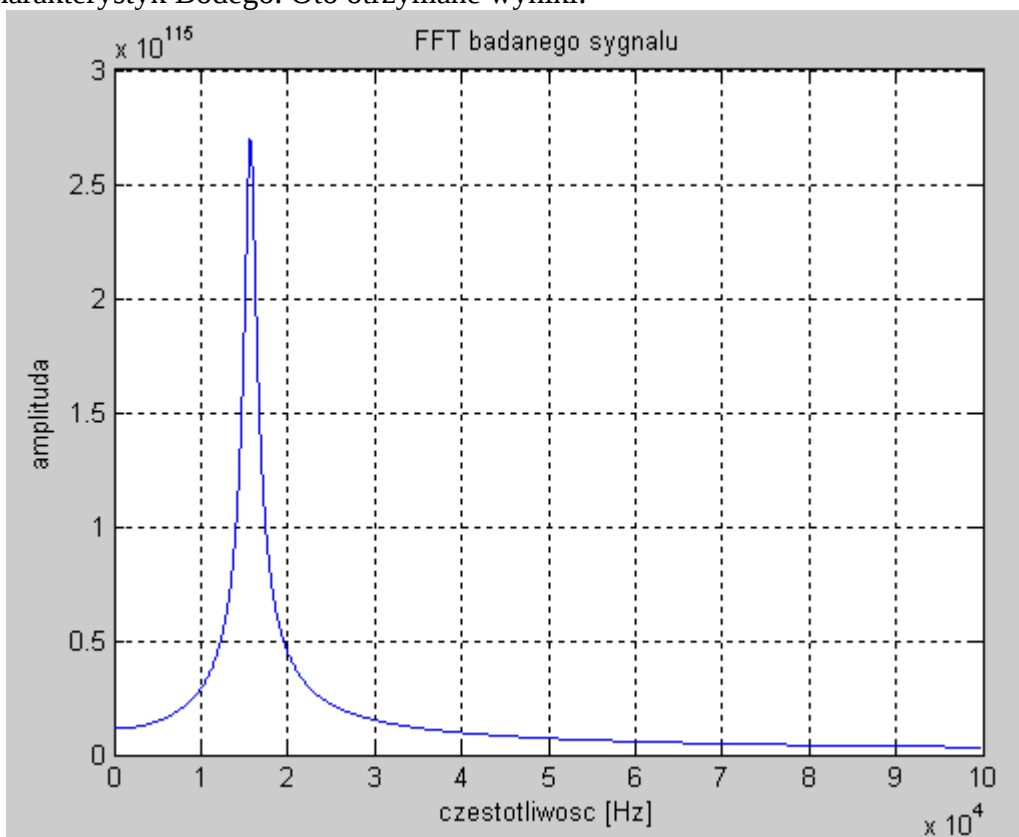
$$C_2 = 112,4nF$$

$$C_4 = 102nF$$

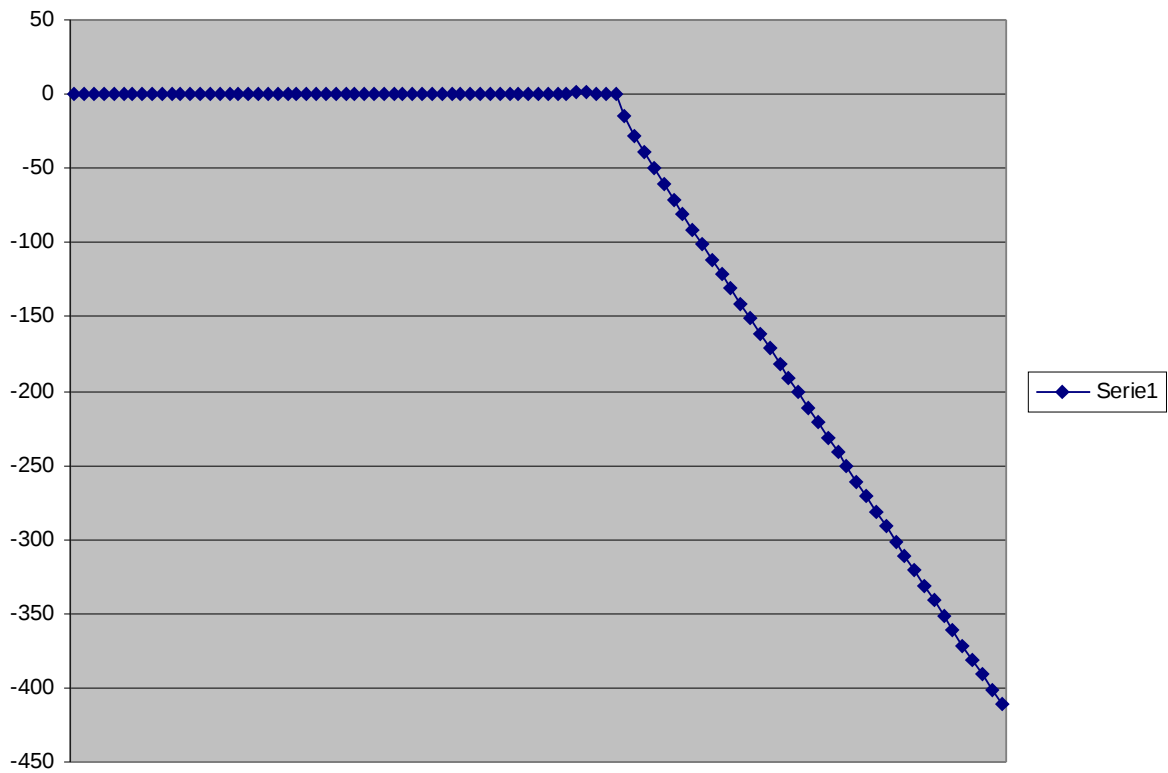


Rys. 45 schemat skonstruowanego filtra - badanie jego charakterystyk

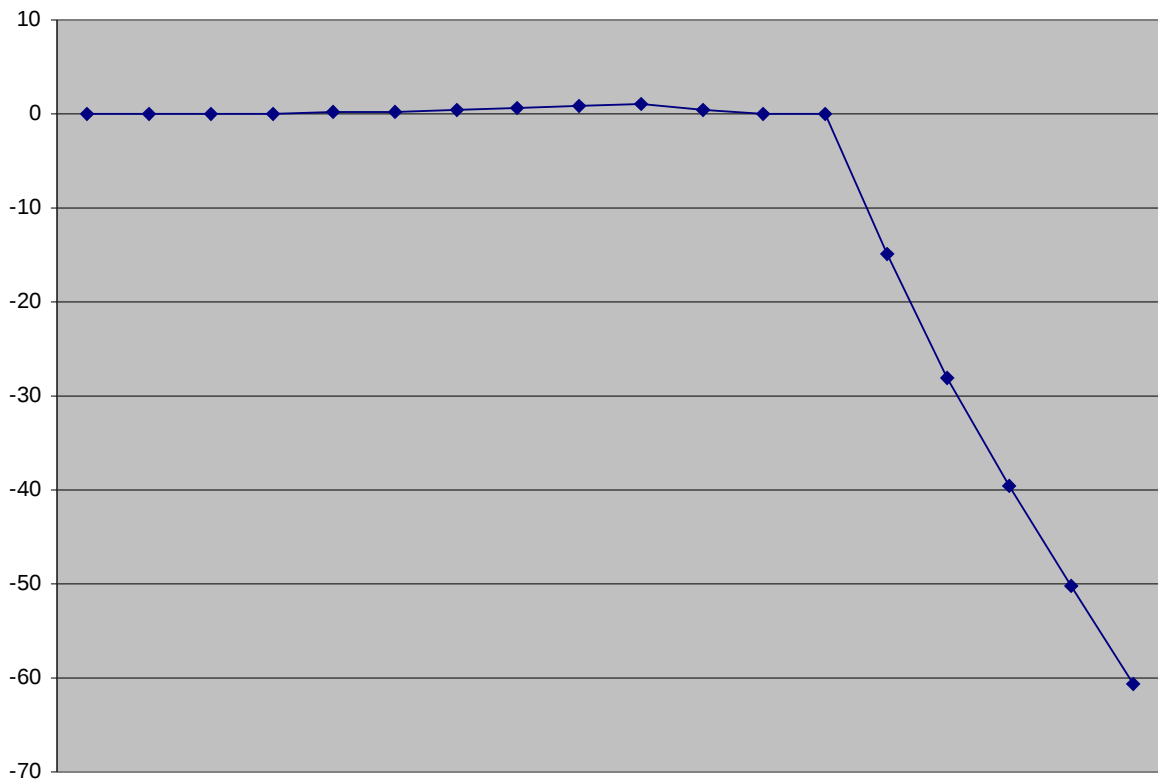
Zamodelowaliśmy układ filtra w programie electronics workbench i dokonaliśmy analizy jego charakterystyk Bodego. Oto otrzymane wyniki:



Rys. 46 odpowiedź filtra na przemiatanie częstotliwości – widoczne wycińanie wyższych harmoniczych



Rys. 47 Charakterystyka bodego filtru



Rys 48 Powiększenie charakterystyki bodego – widać niewielkie zafalowanie magnitudy